
للصف الثالث المتوسط
المنهج الجديد
الطبعة الثانية
2020
الناجح في
الرياضيات
الجزء الثاني:
الفصل الرابع و الفصل الخامس و الفصل السادس
اعداد تربويين من النجف الاشرف
صفاء الكلابي & مصطفى محمد
للتواصل زيارة صفحات السلسلة :
سلسلة الناجح في الرياضيات

# الفصلُ 4

## الهندسة الاحداثية

## Coordinate Geometric

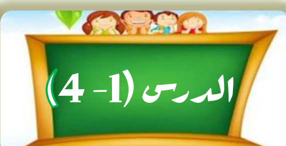


تعد رياضة التزلج من الرياضات الممتعة في الكثير من مناطق العالم، اذ توفر المنحدرات الجبلية مثالاً جيداً عن الميل. فكلما زاد ميل المنحدر تطلب مهارة اكبر من المتزلجين.










## اولاً تمثيل المعادلة الخطية في المستوي الاحداثي :

المعادلة الخطية :- هي المعادلة التي يكون فيها اس المتغير واحد فقط وتكون الصيغة العامة لها بالشكل التالي $ax + by + c = 0$
حيث $a, b, c \in R$ ويكون تمثيلها في المستوي الاحداثي على شكل خط مستقيم .

وتكون علاقة المستقيم مع المحورين حسب نوع المعادلة. وحسب الجدول التالي:

| المعادلة | العلاقة مع المحورين |
|---|---|
| $ax + by + c = 0$ | المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل |
| $ax + by = 0$ | المستقيم يقطع المحورين في نقطة الاصل (المستقيم يمر في نقطة الاصل) |
| $y = k \ , \ k \in R$ | المستقيم يوازي محور السينات $X$ وعمودي على محور الصادات $Y$ ويمر بالنقطة $(0, k)$ |
| $x = h \ , \ h \in R$ | المستقيم يوازي محور الصادات $Y$ وعمودي على محور السنات $X$ ويمر بالنقطة $(h, 0)$ |

### لتمثيل المعادلات الخطية في المستوي الاحداثي نتبع الخطوات التالية:

1. نجعل المعادلة بدلالة $x$ (أي نجعل $y$ في طرف والمتغير $x$ والثوابت في الطرف الاخر وتخلص من معامل $y$ ان وجد) $y = \cdots$ .
2. نضع جدول مكون من اربع اعمدة ، العمود الاول للمتغير $x$ والعمود الثاني للمعادلة و الثالث للمخرجات $y$ والرابع للازواج المرتبة $p(x, y)$ .
3. ناخذ قيمة افتراضية لـ $x = 0,1$ ونعوضها بالمعادلة ونجد قيمة المتغير $y$ ثم نكون الازواج المرتبة $p(x, y)$ .
4. نرسم الازواج المرتبة $p(x, y)$ في المستوي الاحداثي ثم نصل بينهما بخط مستقيم .



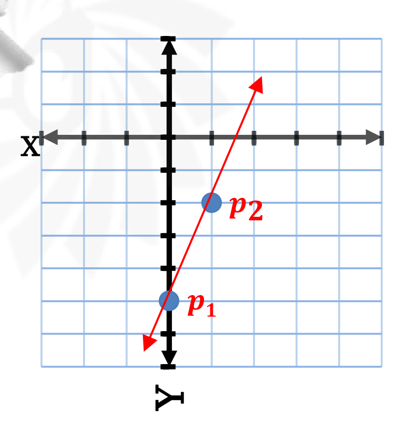

مثل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي ؟ثم بين ما تلاحظه بعد الرسم .

1. $y - 3x + 5 = 0$

نبسط المعادلة بجعل $y$ بطرف والبقية بالطرف الاخر

SOL: $y = 3x - 5$

| $x$ | $y = 3x - 5$ | $y$ | $p(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $y = 3(0) - 5 \Rightarrow y = 0 - 5 = -5$ | $-5$ | $p_1(0, -5)$ |
| $1$ | $y = 3(1) - 5 \Rightarrow y = 3 - 5 = -2$ | $-2$ | $p_2(1, -2)$ |

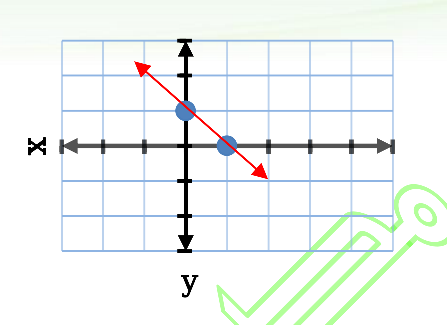



نلاحظ ان المستقيم يقطع محور السينات $x$ ومحور الصادات $y$ ولا يمر بنقطة الاصل

❷ $y + x - 1 = 0$

SOL: $y = -x + 1$

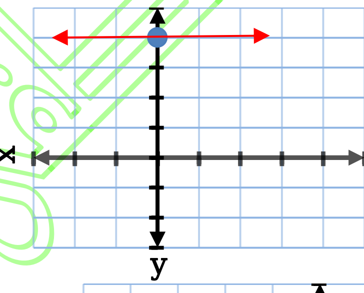
| $x$ | $y = -x + 1$ | $y$ | $p(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $y = -(0) + 1 \Rightarrow y = 0 + 1 \Rightarrow y = 1$ | 1 | $p_1(0,1)$ |
| 1 | $y = -(1) + 1 \Rightarrow y = -1 + 1 \Rightarrow y = 0$ | 0 | $p_2(1,0)$ |




نلاحظ ان المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل .

❸ $y = 4$

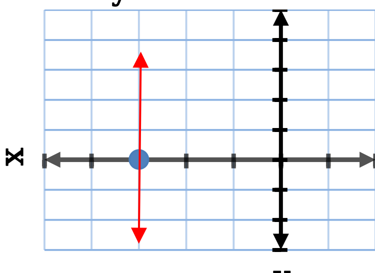
SOL: نلاحظ ان المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات عند النقطة $(0,4)$




ملاحظة: إذا كانت قيمة $y$ تساوي عدد مطلق . فانه المستقيم يوازي محور السينات $x$

❹ $x = -3$

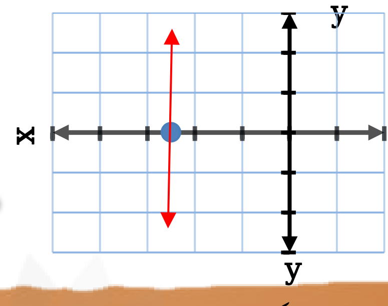
SOL: نلاحظ ان المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند النقطة $(-3,0)$




ملاحظة: اذا كانت قيمة $x$ تساوي عدد مطلق . فانه المستقيم يوازي محور الصادات $y$

❺ $x = \frac{-5}{2}$

SOL: نلاحظ ان المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند النقطة $\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$

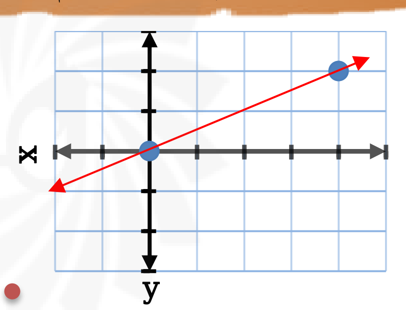



❻ $2y - x = 0$

SOL: $[2y = x] \div 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

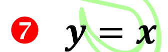
اذا كان معامل $y$ كسر يفضل ان ناخذ قيم $x$ تقبل القسمة على المقام (يعني من مضاعفات المقام)

| $x$ | $y = \frac{x}{2}$ | $y$ | $p(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $y = \frac{0}{2} \Rightarrow y = 0$ | 0 | $p_1(0,0)$ |
| 4 | $y = \frac{4}{2} \Rightarrow y = 2$ | 2 | $p_2(4,2)$ |




نلاحظ ان المستقيم يمر في نقطة الاصل $(0,0)$

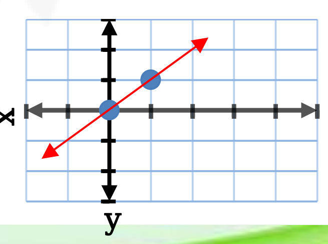
❼ $y = x$



SOL:

| $x$ | $y = x$ | $y$ | $p(x,y)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $y = 0 \Rightarrow y = 0$ | 0 | $p_1(0,0)$ |
| 1 | $y = 1 \Rightarrow y = 1$ | 1 | $p_2(1,1)$ |

نلاحظ ان المستقيم يمر في نقطة الاصل $(0,0)$



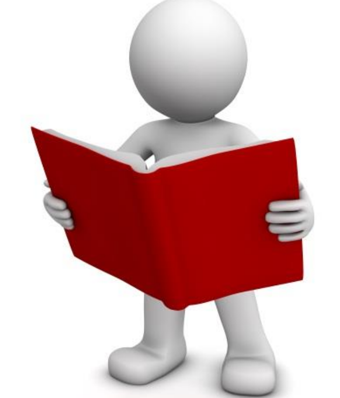
**H.W**: مثل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي وماذا تلاحظ .

| | | | |
|---|---|---|---|
| ❶ $y - x + 1 = 0$ | ❷ $y + 3x - 2 = 0$ | ❸ $y = 1 - 3x$ | ❹ $y = -x + 4$ |
| ❺ $y = -x + 4$ | ❻ $y - x - 3 = 0$ | ❼ $2x - 4y = 8$ | ❽ $y + 5 = 0$ |
| ❾ $y = -4x$ | ❿ $x - 5 = 0$ | ⓫ $x + y = 0$ | ⓬ $y = 2$ |
| ⓭ $x = 4$ | | | |

## ثانياً : التمثيل البياني للمعادلة التربيعية في المستوي الاحداثي:

**المعادلة التربيعية :-** هي المعادلة التي يكون فيها اعلى اس للمتغير تربيع (2) وتكون الصيغة العامه لها $f(x) = y = ax^2 + bx + c$

حيث $a \neq 0, a, b, c \in R$ وتكون تمثيلها في المستوي الاحداثي على شكل $\cup$ او $\cap$ .



**ملاحظة :**

❶ عندما تكون المعادلة سالبة يكون الرسم على شكل $\cap$ تقاطع

❷ عندما تكون المعادلة موجبة يكون الرسم على شكل $\cup$ اتحاد

**لتمثيل المعادلات التربيعية في المستوي الاحداثي نتبع الخطوات التالية .**

❶ نجعل المعادلة بدلالة $x$ (أي نجعل $y$ في طرف والمتغير $x$ والثوابت في الطرف الاخر . ونتخلص من معامل $y$ ان وجد ) $y = \cdots$ .

❷ نضع جدول مكون من اربع اعمدة ، العمود الاول للمتغير $x$ والعمود الثاني للمعادلة والعمود الثالث للمتغير $y$ والعمود الرابع للازواج المرتبة $(x, y)$ .

❸ ناخذ قيمة افتراضية للمتغير $x = -1, -2, 0, 1, 2$ ونعوضها بالمعادلة ونجد قيمة المتغير $y$ ونجد الازواج المرتبة $(x, y)$ .

❹ نرسم الازواج المرتبة $(x, y)$ في المستوي الاحداثي ثم نصل بخط بين الازواج المرتبة (يعني نصل بين النقاط بخط مقوس) وحسب الملاحظة اعلاة .



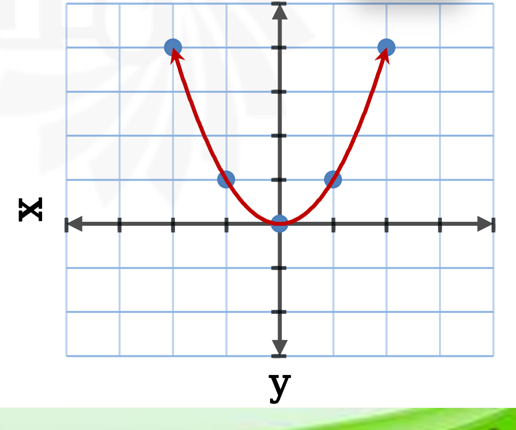

**مثل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي .**

❶ $y = x^2$

SOL:

ملاحظة: في الدالة التربيعية الاشارة السالبة تختفي مع التربيع

| $x$ | $y = x^2$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $y = (-2)^2 \Rightarrow y = 4$ | 4 | $(-2, 4)$ |
| $-1$ | $y = (-1)^2 \Rightarrow y = 1$ | 1 | $(-1, 1)$ |
| 0 | $y = (0)^2 \Rightarrow y = 0$ | 0 | $(0, 0)$ |
| 1 | $y = (1)^2 \Rightarrow y = 1$ | 1 | $(1, 1)$ |
| 2 | $y = (2)^2 \Rightarrow y = 4$ | 4 | $(2, 4)$ |



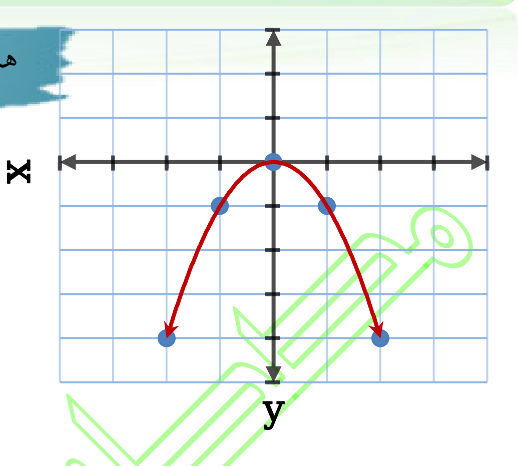



❷ $y = -x^2$

SOL:

هنا نجد ناتج التربيع ثم نضرب العدد بالإشارة السالبة

| $x$ | $y = -x^2$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $y = -(-2)^2 \Rightarrow y = -4$ | $-4$ | $(-2, -4)$ |
| $-1$ | $y = -(-1)^2 \Rightarrow y = -1$ | $-1$ | $(-1, -1)$ |
| $0$ | $y = -(0)^2 \Rightarrow y = 0$ | $0$ | $(0, 0)$ |
| $1$ | $y = -(1)^2 \Rightarrow y = -1$ | $-1$ | $(1, -1)$ |
| $2$ | $y = -(2)^2 \Rightarrow y = -4$ | $-4$ | $(2, -4)$ |

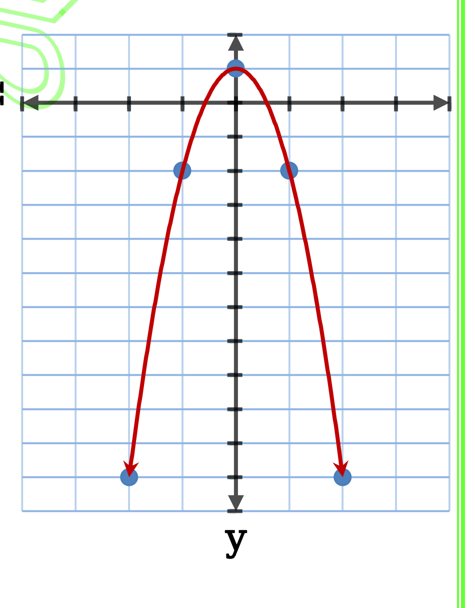



❸ $y = 1 - 3x^2$

SOL:

هنا نجد ناتج التربيع ثم نضربه ب3 ثم نطرحه من 1

| $x$ | $y = 1 - 3x^2$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $y = 1 - 3(-2)^2 = 1 - 3(4)$ $= 1 - 12 \Rightarrow y = -11$ | $-11$ | $(-2, -11)$ |
| $-1$ | $y = 1 - 3(-1)^2 = 1 - 3(1) = 1 - 3$ $\Rightarrow y = -2$ | $-2$ | $(-1, -2)$ |
| $0$ | $y = 1 - 3(0)^2 = 1 - 3(0) = 1 - 0$ $\Rightarrow y = 1$ | $1$ | $(0, 1)$ |
| $1$ | $y = 1 - 3(1)^2 = 1 - 3(1) = 1 - 3$ $\Rightarrow y = -2$ | $-2$ | $(1, -2)$ |
| $2$ | $y = 1 - 3(2)^2 = 1 - 3(4) = 1 - 12$ $\Rightarrow y = -11$ | $-11$ | $(2, -11)$ |




**H.W**: مثل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي

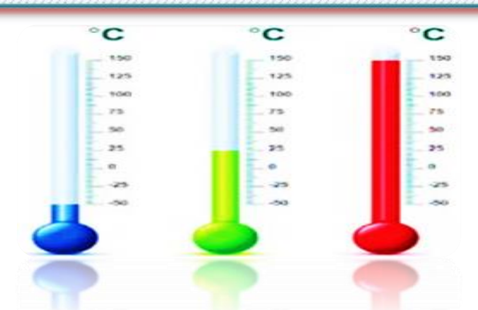
| ❶ $y = x^2 + 4$ | ❷ $y = -3x^2 - 6$ | ❸ $y = x^2 - 1$ | ❹ $y = 2x^2 + 3$ | ❺ $y = 2x^2$ |
|---|---|---|---|---|
| ❻ $x^2 + 5y = 1$ | ❼ $y = 2x^2$ | ❽ $y - 2x^2 = 0$ | ❾ $y = x^2 - 1$ | |

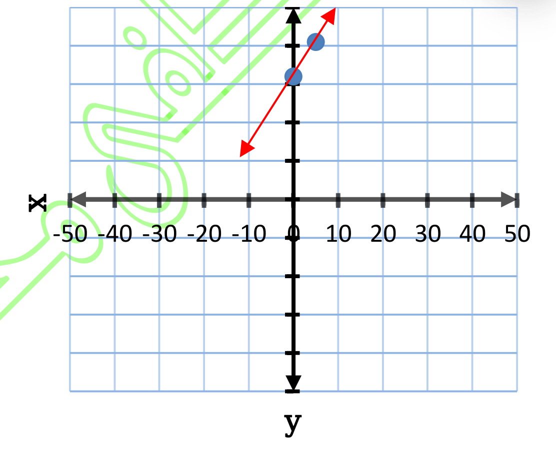



❶ **درجات الحرارة** :- المعادلة $F° = \frac{9}{5}C° + 32$ تبين العلاقة بين درجات الحرارة السيليزية ودرجات الحرارة الفهرنهايتية لها مثل المعادلة بيانياً .

**الجواب** نفرض ان $C° = x$ و $F° = y$ فيكون الزوج المرتب $(C°, F°)$

ناخذ قيم $C°$ الافتراضية من خلال الرسم .



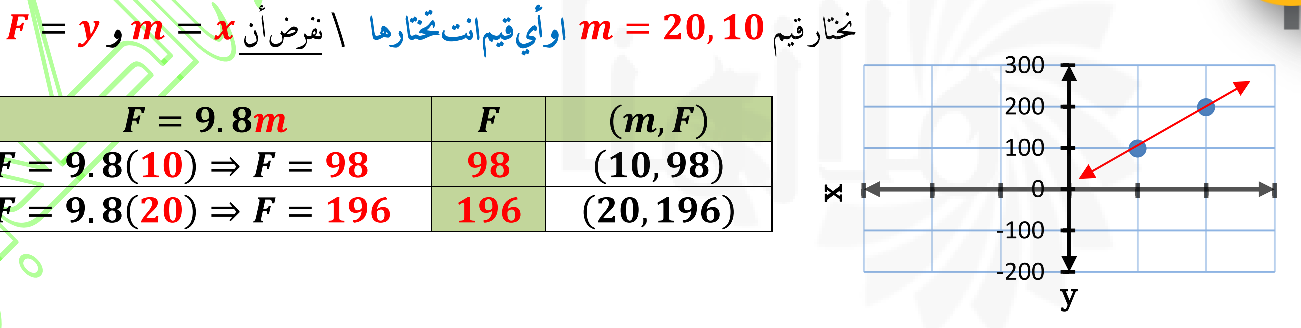


| $C°$ | $F° = \frac{9}{5}C° + 32$ | $F°$ | $(C°, F°)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $F° = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$ | 32 | $(0, 32)$ |
| 5 | $F° = \frac{9}{5}(5) + 32 = 9(1) + 32 = 41$ | 41 | $(5, 41)$ |

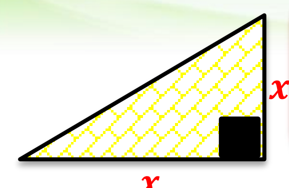
❷ **فيزياء** :- يمثل القانون $F = 9.8m$ القوة الناجمة على تأثير جاذبية الارض على جسم ، حيث $F$ القوة بالنيوتن ، $m$ كتلة الجسم بالكيلو غرام ، مثل القانون بالمستوي الاحداثي .

**الجواب** $F = 9.8m$ تمثل معادلة خطية \ نختار قيم لل $m$ التي تمثل كتلة الجسم وتكون موجبة ولاتساوي صفر ( لانه لا توجد كتلة لجسم سالبة او صفر )

نختار قيم $m = 20, 10$ او أي قيم انت تختارها \ نفرض أن $m = x$ و $F = y$



| $m$ | $F = 9.8m$ | $F$ | $(m, F)$ |
|---|---|---|---|
| 10 | $F = 9.8(10) \Rightarrow F = 98$ | 98 | $(10, 98)$ |
| 20 | $F = 9.8(20) \Rightarrow F = 196$ | 196 | $(20, 196)$ |



❸ **هندسة** :- مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين ، طول ضلعه القائم $x$ وحدة و $y = f(x)$ تمثل مساحته

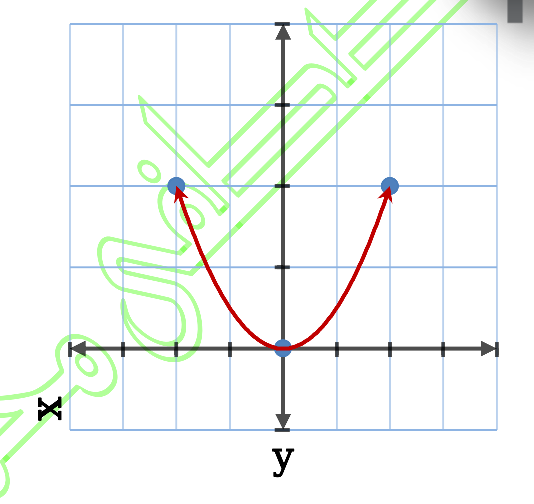
① أكتب العلاقة $f(x)$ بدلالة $x$ . ② مثل العلاقة في المستوي الاحداثي .

**الجواب**

(الارتفاع) × (القاعدة)$\frac{1}{2}$ = مساحة المثلث \ لانه الدالة تمثل المساحة وهذه قانون مساحة مثلث القائم الزاوية

$f(x) = \frac{1}{2}(x)(x) = \frac{1}{2}x^2$ ثم نكون جدول الدالة التربيعية

| $x$ | $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $y = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2$ | 2 | $(-2, 2)$ |
| 0 | $y = \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2}(0) \Rightarrow y = 0$ | 0 | $(0, 0)$ |
| 2 | $y = \frac{1}{2}(2)^2 = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2$ | 2 | $(2, 2)$ |







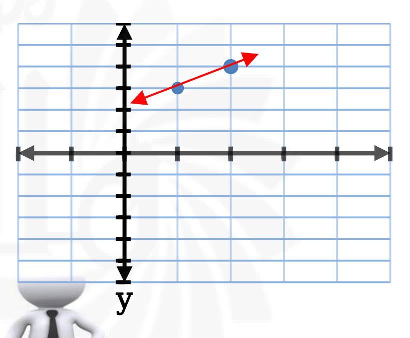

❹ **أعمال** :- تتقاضى شركة معدات بناء 10 الاف دينار كتامين ، ويضاف 5 الاف دينار عن كل ساعة . اكتب المعادلة التي تعبر عن المسألة ؟ ثم مثلها بيانياً في المستوي الاحداثي ؟

**الجواب**

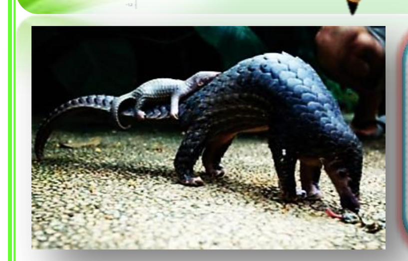
نفرض ان عدد ساعات العمل $x$ ويجب ان تكون قيمها موجبة ونفرض المبلغ الكلي الذي تتقاضاه الشركة $y$

$y = 5x + 10$

| $x$ | $y = 5x + 10$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $y = 5(1) + 10 \Rightarrow y = 15$ | 15 | $(1, 15)$ |
| 2 | $y = 5(2) + 10 \Rightarrow y = 20$ | 20 | $(2, 20)$ |





⑤ **أكل النمل** :- في دراسة لتحديد كمية الحليب التي تحتاج اليها جراء اكل النمل حديثوا الولادة باللترات على مدى بضعة أيام ، توصل الباحثون الى المعادلة $2y - x = 0$ حيث $x$ عدد الايام و $y$ كمية الحليب باللترات ، مثل العلاقة بالمستوى الاحداثي ؟

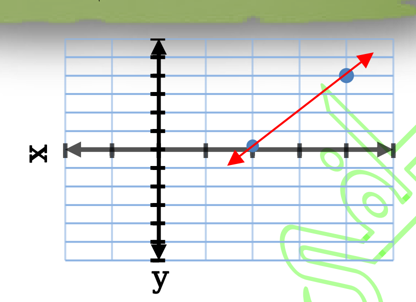
**الجواب**

اذا كان معامل $y$ كسر يفضل ان ناخذ قيم $x$ تقبل القسمة على المقام (يعني من مضاعفات المقام)

$2y - x = 0$

$[2y = x] \div 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

| $x$ | $y = \frac{x}{2}$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| 2 | $y = \frac{2}{2} \Rightarrow y = 1$ | 1 | $(2, 1)$ |
| 4 | $y = \frac{4}{2} \Rightarrow y = 2$ | 2 | $(4, 2)$ |



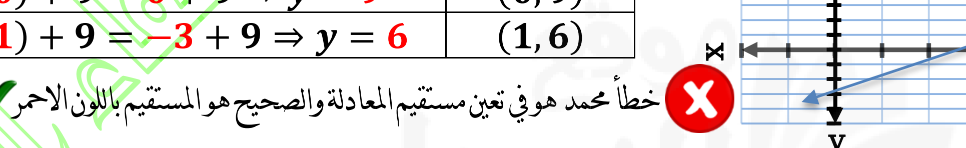

**فكر**

**أولاً اكتشف الخطأ**

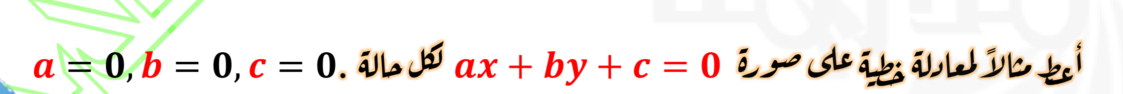
مثل محمد المعادلة الخطية التالية $y = -3x + 9$ بالشكل البياني المجاور ، اكتشف خطأ محمد و صححه .

SOL: $y = -3x + 9$

| $x$ | $y = -3x + 9$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $y = -3(0) + 9 = 0 + 9 \Rightarrow y = 9$ | $(0, 9)$ |
| 1 | $y = -3(1) + 9 = -3 + 9 \Rightarrow y = 6$ | $(1, 6)$ |





خطأ محمد هو في تعين مستقيم المعادلة والصحيح هو المستقيم باللون الاحمر

**ثانياً مسألة مفتوحة**

أعط مثالاً لمعادلة خطية على صورة $ax + by + c = 0$ لكل حالة $a = 0, b = 0, c = 0$.

SOL:

❶ $a = 0 \Rightarrow 2y + 3 = 0$

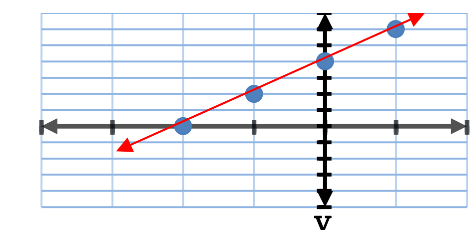
❷ $b = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0$

❸ $c = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 0$

**ثالثاً** تحدٍ

شكلت الازواج المرتبة التالية : $(-1,2),(1,6),(0,4)$ مستقيماً ما نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات ؟

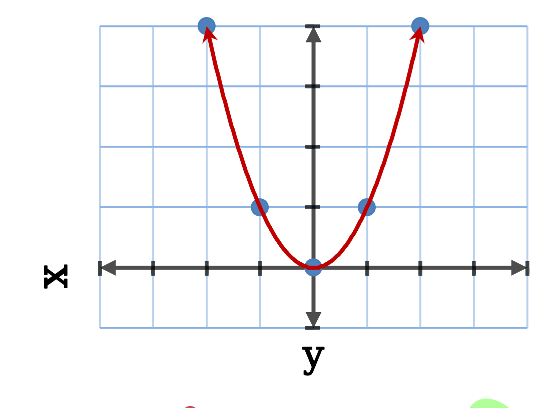
**الجواب:** نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي $(-2,0)$




**رابعاً** تبرير

بين اذا كانت الازواج المرتبة الاتية: تمثل دالة خطية ام تربيعية $\{(2,4),(1,1),(0,0),(-1,1),(-2,4)\}$

**الجواب:** تمثل دالة تربيعية لان الرسم على شكل U .




**خامساً** حس عددي

$y = x + 1$ , $y = x^2 + 1$ ايهما تمثل دالة تربيعية ؟ وضح ذلك .

**الجواب:** $y = x^2 + 1$ تمثل دالة تربيعية \\ لان اس المتغير 2 .

**سادساً** أكتب

خطوات تبين ان $y = 4x + 3$ معادلة خطية ؟

**الجواب:**

❶ الدالة تحتوي على $x$ من الدرجة الاولى

❷ بالتمثيل البياني نجد انها تمثل بمستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الاصل .

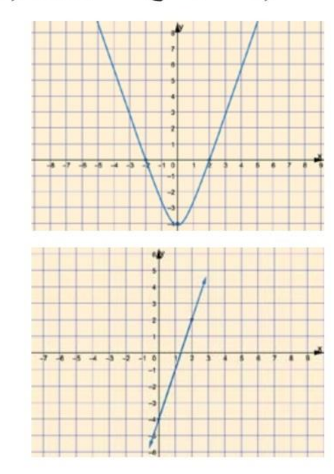
## الدرس [4-1] التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الاحداثي

## Graphical Representation of the Equation in the Coordinate Plane

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{2}$ .

a) يقطع المحورين b) يوازي محور الصادات c) يوازي محور السينات d) لايقطع اي من المحورين



2 اي المعادلات الآتية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانياً جانباً ؟

a) $y = -3x^2$ b) $y = 2x^2 + 4$

c) $y = x^2 - 4$ d) $y = 3x^2 - 4$

3 اي المعادلات الآتية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانياً جانباً ؟

a) $y = 3x + 4$ b) $y = 4x + 3$

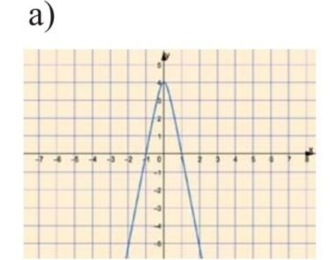
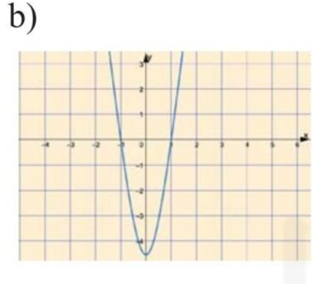
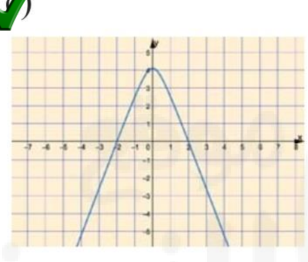
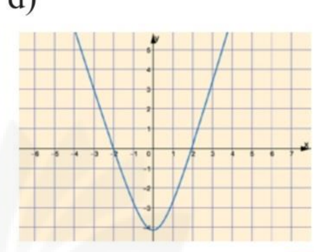
c) $y = -3 + 4$ d) $y = 3x - 4$

4 اي المعادلات الآتية تعبر عن معادلة خطية ؟

a) $y = x^2 + 1$ b) $y^2 = x + 1$ c) $y^2 = x^2 + 1$ d) $y = x + 1$

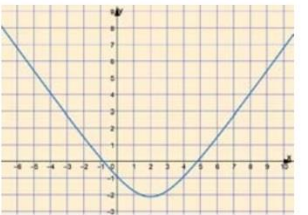
5 اي التمثيلات البيانية تعبر عن المعادلة: $y = -x^2 + 4$ ؟

a) b) c) d)

6 لتمثيل المعادلة غير الخطية نحتاج الى :

a) نقطة واحدة على الاقل b) نقطتان على الاكثر c) نقطتان فقط d) ثلاث نقاط على الاقل



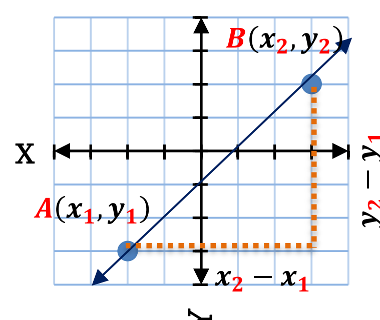
7 ما احداثيا رأس المنحني الممثل جانباً ؟

a) (2,-1) b) (1,2) c) (2,-2) d) (0,2)

الدرس (2-4)

# ميل المستقيم

## اولاً إيجاد ميل المستقيم :




**الميل :** يعرف ميل المستقيم غير الرأسي بانه النسبة بين التغير العمودي والتغير الافقي .

**التغير العمودي (الصادي) :** هو التغير على المحور الصادي ويساوي $y_2-y_1$ .

**التغير الافقي (السيني) :** هو التغير على المحور السيني ويساوي $x_2-x_1$ .

ونجد الميل بالقانون التالي

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الصادي (الارتفاع)}}{\text{التغير السيني (المسافة)}} \Leftarrow m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حيث $m$ : هو ميل المستقيم المار بالنقطتين $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ .

لا يهم ترتيب النقاط ويجوز تقديم $B$ على $A$
$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$

ويكون الميل على اربع حالات :-

| ناتج الميل | اتجاه حركة المستقيم و نوع الميل |
|---|---|
| ① عدد موجب | الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى) عند التحرك على المستقيم من اليسار الى اليمين قيم $y$ تتزايد . |
| ② عدد سالب | الميل سالب (المستقيم نحو الاسفل) عند التحرك على المستقيم من اليسار الى اليمين قيم $y$ تتناقص . |
| ③ صفر | الميل صفر (المستقيم افقي) (المستقيم يوازي محور السينات) قيم $y$ ثابتة . |
| ④ غير محدد (المقام صفر) | الميل غير محدد (المستقيم عمودي) (المستقيم يوازي محور الصادات) قيم $x$ ثابتة . |

**مثال 1** جد ميل المستقيم المحدد بكل نقطتين مما يأتي ثم حدد اتجاه حركته ونوع الميل .

② $A(0,0), B(3,2)$

SOL:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{2-0}{3-0}$$

$$m=\frac{2}{3}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\frac{2}{3}$ موجب

الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى) عند التحرك على المستقيم من اليسار الى اليمين قيم $y$ تتزايد .

① $A(5,7), B(-2,1)$

SOL:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{1-7}{-2-5} \Rightarrow m=\frac{-6}{-7}$$

$$m=\frac{6}{7}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\frac{6}{7}$ موجب

الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى) عند التحرك على المستقيم من اليسار الى اليمين قيم $y$ تتزايد .




③ $(-1,5),(4,2)$ ; $x_1\ y_1\quad x_2\ y_2$

يجوز طرح $y_1$ من $y_2$ بدل ... ويجوز طرح $x_1$ من $x_2$ بدل ...

SOL: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m=\frac{5-2}{-1-4}$

$m=\frac{3}{-5}$

الميل هو $\frac{-3}{5}$ سالب

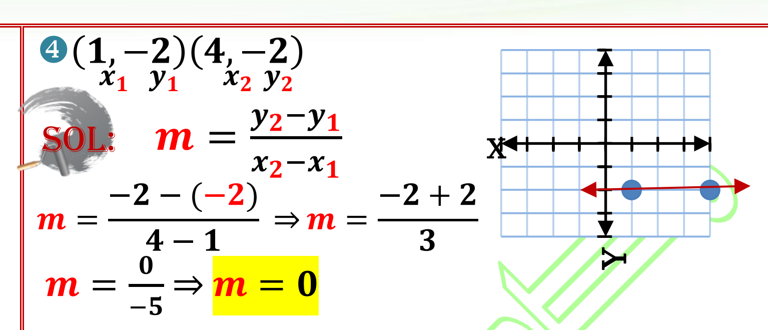
الميل سالب (المستقيم نحو الاسفل) عند التحرك على المستقيم من اليسار الى اليمين قيم $y$ تتناقص .

④ $(1,-2)(4,-2)$ ; $x_1\ y_1\quad x_2\ y_2$

SOL: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m=\frac{-2-(-2)}{4-1}\Rightarrow m=\frac{-2+2}{3}$

$m=\frac{0}{-5}\Rightarrow m=0$

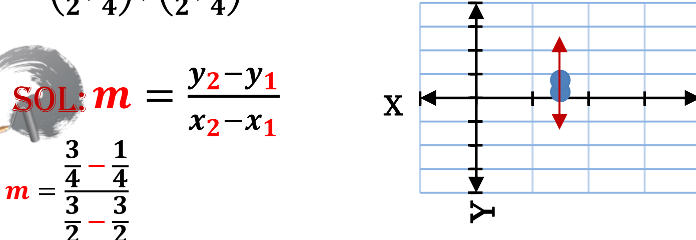


الميل صفر (المستقيم افقي) المستقيم يوازي محور السينات قيم $y$ ثابتة .

⑤ $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$

SOL: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}$



$m=\frac{\frac{2}{4}}{0}\Rightarrow m=\infty$

لا يمكن التقسيم على الصفر\ نفنتي

الميل غير محدد (المستقيم عمودي) المستقيم يوازي محور الصادات قيم $x$ ثابتة

**H.W:** جد ميل المستقيم ثم حدد اتجاه حركته ونوع الميل .

| | | | |
|---|---|---|---|
| ❶ $(-2,-2),(-4,1)$ | ❷ $(-4,4),(2,-5)$ | ❸ $(5,0),(0,2)$ | ❹ $(4,3),(4,-3)$ |
| ❺ $(-6,-1),(-2,-1)$ | ❻ $(4,4),(2,3)$ | ❼ $(6,2),(0,2)$ | ❽ $(-2,4),(5,5)$ |
| ❾ $(-2,-3),(2,4)$ | | | |

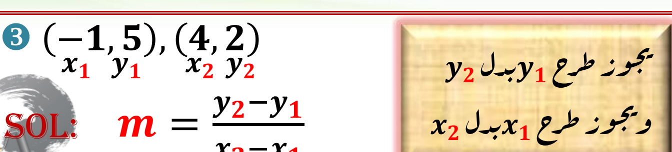
## ثانيا: تقاطع المستقيم مع المحورين في المستوي الاحداثي.

يمكن ان نمثل معادلة المستقيم من خلال ايجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين من خلال ايجاد المقطع السيني و المقطع الصادي وتكوين زوج مرتب $(x,y)$

**المقطع السيني** : هو قيمة $x$ من تقاطع المستقيم مع محور السينات أي $y=0$ ونقطة التقاطع $(x,0)$ .

**المقطع الصادي** : هو قيمة $y$ من تقاطع المستقيم مع محور الصادات أي $x=0$ ونقطة التقاطع $(0,y)$ .





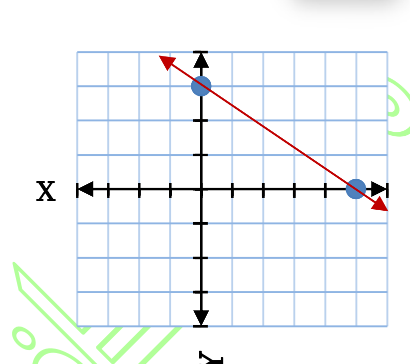



جد المقطع السيني والصادي للمستقيمات التالية .

❶ $3x+5y=15$

SOL:

| المقطع السيني $(x,0)$ | المقطع الصادي $(0,y)$ |
|---|---|
| $3x+5y=15$ نكتب المعادلة | $3x+5y=15$ نكتب المعادلة |
| نعوض قيمة $y=0$ | نعوض قيمة $x=0$ |
| $3x+5(0)=15$ | $3(0)+5y=15$ |
| $[3x=15]\,(\div 3)$ | $[5y=15]\,(\div 5)$ |
| $x=5$ هو المقطع السيني | $y=3$ هو المقطع الصادي |
| ∴ النقطة $(5,0)$ | ∴ النقطة $(0,3)$ |




من خلال النقطتين $(0,3)$ و $(5,0)$ نستطيع ان نرسم المستقيم في المستوي الاحداثي



❷ $y+2=5x-4$ نبسط المعادلة

SOL:

$y-5x=-4-2$

$y-5x=-6$

| المقطع السيني $(x,0)$ | المقطع الصادي $(0,y)$ |
|---|---|
| $y-5x=-6$ | $y-5x=-6$ |
| نعوض قيمة $y=0$ | نعوض قيمة $x=0$ |
| $(0)-5x=-6$ | $y-5(0)=-6$ |
| $[-5x=-6]\quad \div(-5)$ | $y-0=-6$ |
| $x=\frac{6}{5}$ هو المقطع السيني | $y=-6$ هو المقطع الصادي |
| ∴ النقطة $\left(\frac{6}{5},0\right)$ | ∴ النقطة $(0,-6)$ |

❸ $y=\frac{-1}{2}x+4$

SOL:

$y+\frac{1}{2}x=4$

| المقطع السيني $(x,0)$ | المقطع الصادي $(0,y)$ |
|---|---|
| $y+\frac{1}{2}x=4$ | $y+\frac{1}{2}x=4$ |
| نعوض قيمة $y=0$ | نعوض قيمة $x=0$ |
| $(0)+\frac{1}{2}x=4 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x=4\right]\,(\times 2)$ | $y+\frac{1}{2}(0)=4$ |
| $x=8$ هو المقطع السيني | $y=4$ هو المقطع الصادي |
| ∴ النقطة $(8,0)$ | ∴ النقطة $(0,4)$ |




❹ $y = -\frac{3}{2}x$

SOL: $y + \frac{3}{2}x = 0$

| المقطع السيني $(x, 0)$ | المقطع الصادي $(0, y)$ |
|---|---|
| $y + \frac{3}{2}x = 0$ | $y + \frac{3}{2}x = 0$ |
| نعوض قيمة $y = 0$ | نعوض قيمة $x = 0$ |
| $(0) + \frac{3}{2}x = 0$ | $y + \frac{3}{2}(0) = 0$ |
| $\left[\frac{3}{2}x = 0\right]\left(\times\frac{2}{3}\right)$ | $y + 0 = 0$ |
| $x = 0$ هو المقطع السيني | $y = 0$ هو المقطع الصادي |
| ∴ النقطة $(0, 0)$ | ∴ النقطة $(0, 0)$ |

❺ $x = -2$

SOL:

∴ المقطع السيني هو $-2$ ونقطة التقاطع $(-2, 0)$ ويكون المستقيم يوازي محور الصادات

❻ $y = 4$

SOL:

∴ المقطع الصادي هو $4$ ونقطة التقاطع $(0, 4)$ ويكون المستقيم يوازي محور السينات

❼ $3y = -6$



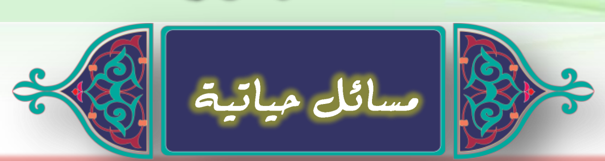
SOL: $(3y = -6)(\div 3)$

$y = -2$

∴ المقطع الصادي هو $-2$ ونقطة التقاطع $(0, -2)$ ويكون المستقيم يوازي محور السينات

**H.W: جد المقطع السيني والمقطع الصادي للمستقيمات التالية**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ❶ $3x + 6y = 18$ | ❷ $y = -x + 8$ | ❸ $5x = y - 8$ | ❹ $2x + 6y = 12$ |
| ❺ $y + 4 = 2x - 4$ | ❻ $2x + 4y = 12$ | ❼ $3y - 7x = 9$ | ❽ $y = -3.5x + 2$ |
| ❾ $0 = y + 3$ | ❿ $y = -4x$ | ⓫ $y = -5x$ | ⓬ $x = 4$ |
| ⓭ $x = -4$ | ⓮ $y - x = 4$ | ⓯ $y = \frac{-3}{4}x - 5$ | ⓰ $y = \frac{-3}{2}x$ |




**1 درجات الحرارة** :- يمثل الجدول المجاور تغير درجات الحرارة بالزمن ( بالساعات ) ، جد ميل المستقيم و اشرح ما يعنيه ؟

| الزمن ( بالساعات ) | درجات الحرارة |
|---|---|
| 1 | −2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 4 |
| 5 | 10 |

**الجواب**

نختار أي نقطتين من الجدول $(2,1)$ و $(1,-2)$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m = \frac{1-(-2)}{2-1} \Rightarrow m = \frac{1+2}{1} \Rightarrow m = 3$

بما ان ميل المستقيم 3 موجب اذن درجات الحرارة تزداد 3 درجات كل 1 ساعة

**2 فيزياء**: يمثل الجدول المجاور كمية السائل المتدفق من حوض خلال فترة زمنية ، جد ميل المستقيم الذي يمثله الجدول وفسر ما يعنيه ؟

| كمية السائل المتسرب | |
|---|---|
| الزمن ( بالثانية ) | حجم السائل $m^3$ |
| 10 | 40 |
| 13 | 52 |
| 16 | 64 |
| 19 | 76 |

**الجواب**

نختار أي نقطتين من الجدول $(13,52)$ و $(10,40)$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m = \frac{52-40}{13-10} \Rightarrow m = \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\cancel{3}} \Rightarrow m = 4$

يتدفق الماء بمعدل $4m^3$ في الثانية الواحدة

**3 نبات**: اذا كان طول نبتة 30cm في غضون كل شهرين تنمو بمقدار ثابت 4cm اخرى

① اكمل الجدول ② ما ميل المستقيم الذي تمثله العلاقة بين طول النبتة والزمن

③ أكتب الدالة الخطية التي يمثلها الجدول ④ مثل الدالة في المستوي الاحداثي

| الزمن | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| طول النبتة | | | |

**الجواب**

①

| الزمن | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| طول النبتة | 30 | 34 | 38 |

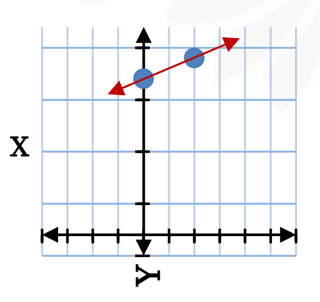
نختار أي نقطتين من الجدول $(2,34)$ و $(0,30)$

② $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m = \frac{34-30}{2-0} \Rightarrow m = \frac{4}{2} \Rightarrow m = 2$

③ نكون الدالة الخطية من خلال الجدول $y = 2x + 30$ حيث المدخلات الزمن و المخرجات طول النبتة

| $x$ | $y = 2x + 30$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $y = 2(0) + 30$ | 30 | $(0,30)$ |
| 2 | $y = 2(2) + 30$ | 34 | $(2,34)$ |

④








## أولاً تحدٍ

جد قيمة $a$ التي تجعل ميل المستقيم المار بنقطتين $(1,6),(-5,a)$ يساوي $\frac{1}{2}$ .

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\qquad m = \frac{1}{2}$ , $(1,6),(-5,a)$

$\frac{1}{2} = \frac{a-6}{-5-1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a-6}{-6} \Rightarrow 2(a-6) = -6 \Rightarrow 2a - 12 = -6 \Rightarrow$

$2a = -6 + 12 \Rightarrow [2a = 6] \div 2 \Rightarrow a = 3$

## ثانياً تفكير ناقد

هل يمكن تحديد ميل مستقيم يمر بالنقطتين $(7,3)$ و $(7,-3)$ ؟

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\qquad (7,-3),(7,3)$

$m = \frac{3-(-3)}{7-7} \Rightarrow m = \frac{6}{0} \Rightarrow m = \infty$ غير معرف

ازن لا يمكن تحديد الميل لهذا المستقيم

## ثالثاً اكتشف الخطأ

ميل المستقيم الذي يمر في النقطتين $(3,-1)$ و $(0,3)$ هو $\frac{3}{4} = \frac{3-0}{3-(-1)}$ أكتشف الخطأ وصححه

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\qquad (0,3),(3,-1)$

$m = \frac{3-(-1)}{3-0}$

$m = \frac{3+1}{3} \Rightarrow m = \frac{4}{3}$ ✓

الخطأ هو في تعريف القانون حيث التغير السيني بالبسط والتغير الصادي في المقام وليس العكس

## رابعاً مسأله مفتوحه

اذكر نقطتين على مستقيم يكون ميله يساوي $\frac{-1}{3}$

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\qquad (1,2),(4,1)$

$m = \frac{1-2}{4-1} \Rightarrow m = \frac{-1}{3}$

## خامساً تفكير ناقد

من الشكل البياني المجاور حدد اتجاه المستقيم .

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ , $(2,0),(0,2)$ من المخطط

$m = \frac{2-0}{0-2} \Rightarrow m = \frac{2}{-2} \Rightarrow m = -1$

بما انه الميل سالب ازن المستقيم يتجه نحو الاسفل

## سادساً اكتب

بأسلوبك ماذا يعني الميل يساوي صفراً ، والميل غير محدد .

الجواب : الميل يساوي صفراً : المستقيم // محور السينات \ الميل غير محدد :- المستقيم // محور الصادات .






الدرس [4-2] ميل المستقيم

## Slop of a Line

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 أي ميل يعبر عن ميل المستقيم المار بالنقطتين: $(-1,3),(5,-2)$

a) $\frac{5}{6}$  b) $-\frac{6}{5}$  c) $\frac{-5}{6}$ ✓  d) $\frac{6}{5}$

2 المستقيم الموازي لمحور الصادات يكون ميله:

a) صفراً  b) غير معرف ✓  c) سالب  d) موجب

3 المقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته $3x-5y=15$ هو:

a) -5  b) 3  c) 5  d) -3 ✓

4 نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $x+y=6$ مع محور السينات هي:

a) (0,6)  b) (-6,0)  c) (6,0) ✓  d) (0,0)

5 اي المستقيمات الآتية تعبر عن المستقيم الممثل جانباً؟

a) $2x - 3y = 0$ ✓  b) $3y + 2x = 0$  c) $3y - 2x = 0$ ✓  d) $2x + 3y = 0$

6 المستقيم الموازي لمحور السينات يكون ميله:

a) صفراً ✓  b) غير معرف  c) سالب  d) موجب

7 ما ميل المستقيم $3x - 2y = -6$ ؟

a) $-\frac{3}{2}$  b) $-\frac{2}{3}$  c) 3  d) $\frac{3}{2}$ ✓

8 ميل المستقيم المار بالنقطتين $(8,-3),(5,-3)$؟

a) موجب  b) سالب  c) صفر ✓  d) غير معرف




الدرس (3-4) **معادلة المستقيم**

هناك ثلاث حالات في كتابة معادلة المستقيم

## اولاً: كتابة معادلة مستقيم بمعرفة نقطتين منه:

عندما يكون في السؤال النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ والمطلوب كتابة معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ نستخدم المعادلة التالية

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حيث $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ يمثل ميل المستقيم .

**مثال 1** جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منهما بنقطتين لكل مما يأتي .

**SOL:** ❶ $(-3, 1), (2, -1)$ حيث $x_1, y_1$ و $x_2, y_2$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-1}{x-(-3)} = \frac{-1-1}{2-(-3)}$$

$$\frac{y-1}{x+3} = \frac{-2}{5}$$

$$-2(x+3) = 5(y-1)$$

$$-2x - 6 = 5y - 5$$

$$2x + 5y = -6 + 5$$

$$2x + 5y = -1$$ معادلة المستقيم المطلوبة

نعوض النقطتين في المعادلة بدل $x_1, x_2$ و $y_1, y_2$ وتبقى قيم $x, y$ دون تعويض لأنها متغيرات معادلة المستقيم

طرفين في وسطين ثم نفتح الاقواس ونبسط

**SOL:** ❷ $(0, 0), (-3, 7)$ حيث $x_1, y_1$ و $x_2, y_2$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{7-0}{-3-0}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{7}{-3}$$

$$7x = -3y$$

$$7x + 3y = 0$$ معادلة المستقيم المطلوبة

**SOL:** ❸ $\left(\frac{1}{2}, 3\right), \left(\frac{3}{2}, -1\right)$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-1-3}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{\frac{2}{2}} \Longrightarrow \frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{1}$$

$$1(y-3) = -4\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$y - 3 = -4x + 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y - 3 = -4x + 2 \Longrightarrow 4x + y = 2 + 3$$

$$4x + y = 5$$ معادلة المستقيم المطلوبة

**H.W: جد معادلة المستقيم للنقاط الاتية :**

| | |
|---|---|
| ❶ $(-3, 2), (3, 1)$ | ❷ $(0, 2), (2, -4)$ |
| ❸ $(0, 7), (-5, 0)$ | ❹ $(3, -2), (1, 5)$ |
| ❺ $(-2, -3), (2, 3)$ | |




## ثانياً كتابة معادلة مستقيم بمعرفة ميلة ونقطه منه:

عندما يعطي في السؤال نقطة $(x_1, y_1)$ و ميل $m$ نستخدم المعادلة التالية $y - y_1 = m(x - x_1)$ و تسمى المعادلة ميل- نقطة




أكتب معادلة المستقيم اذا علمت ميله ونقطة منه .

❶ $m = -6 \quad , \quad (0, 0)$

SOL:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -6(x - 0)$

$y = -6x$

$y + 6x = 0$ معادلة المستقيم المطلوبة

❸ $m = -3 \quad , \quad (-3, 7)$

SOL:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 7 = -3(x - (-3))$

$y - 7 = -3(x + 3)$

$y - 7 = -3x - 9$

$y + 3x = 7 - 9$

$y + 3x = -2$ معادلة المستقيم المطلوبة

❷ $m = \frac{-2}{5} \quad , \quad (4, 6)$

SOL:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\left[y - 6 = \frac{-2}{5}(x - 4)\right] (\times 5)$

نضرب الطرفين ب5 للتخلص من مقام الكسر

$5(y - 6) = 5\left(\frac{-2}{5}(x - 4)\right) \Rightarrow 5y - 30 = -2(x - 4)$

$5y - 30 = -2x + 8$

$5y + 2x = 8 + 30$

$5y + 2x = 38$ معادلة المستقيم المطلوبة

**H.W:** أكتب معادلة المستقيم اذا علمت ميله ونقطة منه

❶ $m = \frac{1}{3} \quad , \quad (-1, -3)$

❷ $m = \frac{1}{5} \quad , \quad (0, -3)$




جد معادلة المستقيم اذا علمت ميله و أحد مقطعيه .

❶ ميله $\frac{3}{2}$ ومقطعه الصادي $-5$ .

SOL:

∴ النقطة $(, -5)$ لان المقطع الصادي يساوي $-5$ والمقطع السيني يساوي $0$ لانه لم يعطى في السؤال

$m = \frac{3}{2} \quad , \quad (0, -5)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-5) = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow \left[y + 5 = \frac{3}{2}x\right] (\times 2)$

$2(y + 5) = 2\left(\frac{3}{2}x\right) \Rightarrow 2y + 10 = 3x$

$2y - 3x = -10$ معادلة المستقيم المطلوبة

❷ ميله $\frac{1}{2}$ و مقطعه السيني يساوي $-1$

SOL:

∴ النقطة $(-1, 0)$ لان المقطع السيني يساوي $-1$ والمقطع الصادي يساوي $0$ لانه لم يعطى في السؤال

$m = \frac{1}{2} \quad , \quad (-1, 0)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{1}{2}(x - (-1)) \Rightarrow \left[y = \frac{1}{2}(x + 1)\right] (\times 2)$

$2(y) = 2\left(\frac{1}{2}(x + 1)\right) \Rightarrow 2y = x + 1$

$2y - x = 1$ معادلة المستقيم المطلوبة

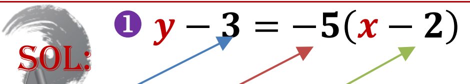
**H.W:** جد معادلة المستقيم اذا علمت ميله و أحد مقطعيه .

❶ ميله $\frac{-1}{5}$ ومقطعه السيني يساوي 3 .

❷ ميله $\frac{1}{5}$ و مقطعه الصادي يساوي $-3$




مثال 4 استعمل معادلة ميل المستقيم لكل مما يأتي وجد الميل والنقطة المار بها .



❶ $y-3=-5(x-2)$

SOL:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$\therefore m=-5$ , $(2,3)$ بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والنقطة

❷ $y+7=\frac{2}{5}x$

SOL:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-7)=\frac{2}{5}(x-0)$

$\therefore m=\frac{2}{5}$ , $(0,-7)$

نرتب المعادلة حسب المعادلة الاصلية ثم نقارنه لايجاد الميل والنقطة. المتغير الغير موجود نفرضه 0

❸ $y+1=-x+4$

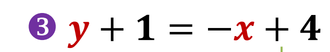
SOL:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-1)=-1(x-(4))$

$\therefore m=-1$ , $(4,-1)$

عندما يكون بين العددين عملية جمع انتبه فأن العدد الثاني هو اشارته سالبه



H.W: استعمل معادلة ميل المستقيم لكل مما يأتي وجد الميل والنقطة المار بها

| ❶ $y-1=2(x-3)$ | ❷ $y-x=8$ |
|---|---|
| ❸ $y+\frac{3}{2}=-5(x-8)$ | |

❹ $\frac{3}{5}y=\frac{5}{2}(x+2)$

SOL:

$\left[\frac{3}{5}y=\frac{5}{2}(x+2)\right]\left(\times\frac{5}{3}\right)$

$\frac{5}{3}\left(\frac{3}{5}y\right)=\frac{5}{3}\left(\frac{5}{2}(x+2)\right)$

$y-0=\frac{25}{6}(x+2)$

$y-0=\frac{25}{6}(x-(-2))$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$\therefore m=\frac{25}{6}$ , $(-2,0)$ بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والنقطة

نضرب طرفي المعادلة في مقلوب $\frac{3}{5}$ متغير $y$ فيكون المقلوب $\frac{5}{3}$ لكي نتخلص منه

❺ $2y-3x=8$

SOL:

$[2y-8=3x](\div 2)$

$y-4=\frac{3x}{2}$

$y-4=\frac{3}{2}(x-0)$

$y-y_1=m(x-x_1)$

بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والنقطة

$m=\frac{3}{2}$ , $(0,4)$

## ثالثاً كتابة معادلة مستقيم اذا علم ميله ومقطعة الصادي:

عندما يكون في السؤال الميل والمقطع الصادي نستخدم المعادلة $y=mx+K$ حيث $K$ هو المقطع الصادي و تسمى المعادلة ميل-مقطع صادي



مثال 5 أكتب معادلة المستقيم اذا علمت ان ميله $-6$ ومقطعه الصادي 5 .

SOL:

$y=mx+K$

$y=-6x+5$

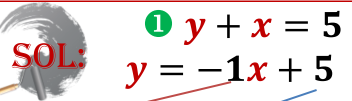
$6x+y=5$ معادلة المستقيم المطلوبة



## مثال 6

استعمل معادلة الميل لكل مستقيم لايجاد ميله ومقطعه الصادي .







SOL:

❶ $y + x = 5$

نرتب المعادلة بجعل $y$ في طرف و $x$ والثوابت في الطرف الثاني

$y = -1x + 5$

$y = mx + K$ بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والمقطع الصادي

$\therefore m = -1 \quad , \quad K = 5$

❷ $5x = 7y + 8$

$7y = 5x - 8$

نقسم على 7 معامل $y$

$[7y = 5x - 8](\div 7)$

$y = \frac{5x}{7} - \frac{8}{7}$

$y = mx + K$ بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والمقطع الصادي

$\therefore m = \frac{5}{7} \quad , \quad K = \frac{-8}{7}$



❸ $y = x$

عند المقارنة .. المتغير الغير موجود نعوض عنه ب 0

$y = 1x + 0$

$y = mx + K$ بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والمقطع الصادي

$\therefore m = 1 \quad , \quad k = 0$



❹ $y = 1$

عند المقارنة .. المتغير الغير موجود نعوض عنه ب 0

$y = 0x + 1$

$y = mx + K$

$\therefore m = 0 \quad , \quad K = 1$



❺ $2x + 3y = 6$

$3y = -2x + 6$

نقسم على 3 معامل $y$

$[3y = -2x + 6](\div 3)$

$y = \frac{-2x}{3} + \frac{6}{3} \Rightarrow y = \frac{-2x}{3} + 2$

$y = mx + K$ بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والمقطع الصادي

$\therefore m = \frac{-2}{3} \quad , \quad K = 2$



❻ $y = 0$

عند المقارنة .. المتغير الغير موجود نعوض عنه ب 0

$y = 0x + 0$

$y = mx + K$ بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والمقطع الصادي

$\therefore m = 0 \quad , \quad K = 0$



❼ $\frac{1}{3}y = -5x - 1$

نضرب الطرفين ب 3 للتخلص من معامل $y$

$\left[\frac{1}{3}y = -5x - 1\right](\times 3)$

$y = -15x - 3$

$y = mx + K$ بالمقارنة مع المعادلة الاصلية نكتب الميل والمقطع الصادي

$\therefore m = -15 \quad , \quad K = -3$



H.W : استعمل معادلة الميل لكل مستقيم لايجاد ميله ومقطعه الصادي.

| ❶ $5y = -2x - 1$ | ❷ $-y = 7x$ | ❸ $y + 7 = 3x + 5$ |
|---|---|---|
| ❹ $2x - 4y = 8$ | | |

## مثال 7

مستقيم يمر في النقطة $(5, -1)$ وميله $\frac{-2}{5}$ جد مقطعه الصادي ومعادلته .



SOL:

$m = \frac{-2}{5} \quad , \quad \overset{x_1}{(5}, \overset{y_1}{-1)}$

نجد معادلة المستقيم بواسطة المعادلة ميل - نقطة

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-1) = \frac{-2}{5}(x - 5)$

$y + 1 = \frac{-2}{5}x + \frac{2}{5}(5)$

$y + 1 = \frac{-2}{5}x + 2$

$y = \frac{-2}{5}x + 2 - 1$

$y = \frac{-2}{5}x + 1$ معادلة المستقيم المطلوبة

$y = mx + K$

$\therefore K = 1$ بالمقارنة مع معادلة ميل - مقطع صادي نكتب المقطع الصادي




مثال 8

مستقيم يمر بالنقطة $(1,-4)$ وميله $\frac{-1}{2}$ جد معادلته ومقطعه الصادي .

SOL:

$m=\frac{-1}{2}\quad,\quad (\overset{x_1}{1},\overset{y_1}{-4})$

نجد معادلة المستقيم بواسطة المعادلة ميل - نقطة

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-4)=\frac{-1}{2}(x-1)$

$y+4=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}$



$$\frac{1}{2}-\frac{4}{1}=\frac{1-8}{2}=\frac{-7}{2}$$

$y=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}-4$

$y=\frac{-1}{2}x-\frac{7}{2}$ معادلة المستقيم المطلوبة

$y=mx+K$

بالمقارنة مع معادلة ميل_مقطع صادي نكتب المقطع الصادي

$\therefore K=\frac{-7}{2}$

**H.W:** مستقيم يمر بالنقطة $(0,3)$ الذي ميله $\frac{-2}{3}$ جد معادلته ومقطعه الصادي .

---

## مسائل حياتية



**1 دراجات هوائية :-** يقطع راكب دراجة هوائية 20 كيلو متراً في ساعتين ويقطع 50 كيلو متراً في خمس ساعات ، ما المعادلة الخطية التي تربط بين المسافة و الزمن ؟



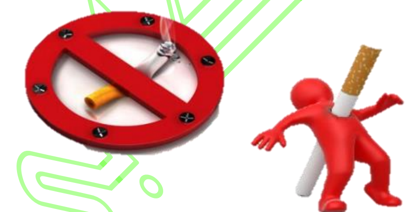

نفرض ان $A(\underset{x_1}{2},\underset{y_1}{20}), B(\underset{x_2}{5},\underset{y_2}{50})$ نعوض النقطتين في القانون

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\frac{y-20}{x-2}=\frac{50-20}{5-2}\Rightarrow\frac{y-20}{x-2}=\frac{30}{3}$

$\frac{y-20}{x-2}=\frac{10}{1}\Rightarrow y-20=10(x-2)\Longrightarrow y-20=10x-20$

$y-10x=20-20\Rightarrow y-10x=0$



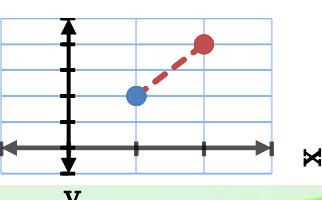
**2 صحة:-** في دراسة حديثة توصلت الى ان الشخص يفقد 2 ساعة من عمره عند استهلاكه علبة سكائر واحدة. أكتب المعادلة التي تمثل ذلك، ومثلها بيانياً .

الجواب

نكون جدول يوضح العلاقة بين السكائر والزمن و نختار أي نقطتين $(\underset{x_1}{1},\underset{y_1}{2})$ و $(\underset{x_2}{2},\underset{y_2}{4})$



| السكائر | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| الوقت | 2 | 4 | 6 |




$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\frac{y-2}{x-1}=\frac{4-2}{2-1}\Rightarrow\frac{y-2}{x-1}=\frac{2}{1}\Rightarrow y-2=2(x-1)$

$y-2=2x-2\Rightarrow y=2x+2-2$

$y=2x$





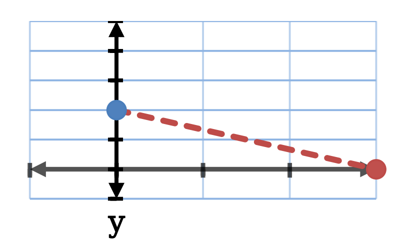

③ نقود:- يريد شخص تسديد مبلغ قدره 30 مليون ، بدفعات شهرية متساوية مقدارها 1.5 مليون المعادلة الخطية الاتية $y = -1.5x + 30$ ، حيث $y$ القيمة الباقية من المبلغ ، $x$ عدد الاشهر. استعمل معادلة الميل - المقطع لتحديد ميله ومقطعه.

**الجواب**

بالمقارنة $y = -1.5x + 30$

$y = mx + k$

$\therefore m = -1.5 \quad , \quad K = 30$




④ هندسة:- استعمل المعلومات في الشكل المجاور وجد معادلة المستقيم في الحالات الاتية :

① نقطتان ② ميل ونقطة ③ ميل ومقطعه الصادي .

**الجواب**

ناخذ النقطتين $(3, 0), (0, 2)$ ($x_1 \; y_1 \; x_2 \; y_2$)

① نجد معادلة المستقيم من نقطتان

$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\frac{y-0}{x-3} = \frac{2-0}{0-3} \Rightarrow \frac{y}{x-3} = \frac{2}{-3}$

$2(x-3) = -3y \Rightarrow 2x - 6 = -3y$

$2x + 3y = 6$

② ميل ونقطة : نجد الميل باستخدام القانون .

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m = \frac{2-0}{0-3} \Rightarrow m = \frac{2}{-3}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{2}{-3}(x - 3)$

$y = \frac{-2}{3}x + 2 \Rightarrow \left[y + \frac{2}{3}x = 2\right] (\times 3)$

$3y + 2x = 6$

③ ميل ومقطعه الصادي .

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m = \frac{2-0}{0-3} \Rightarrow m = \frac{2}{-3}$

من خلال الرسم يكون مقطعه الصادي $K = 2$

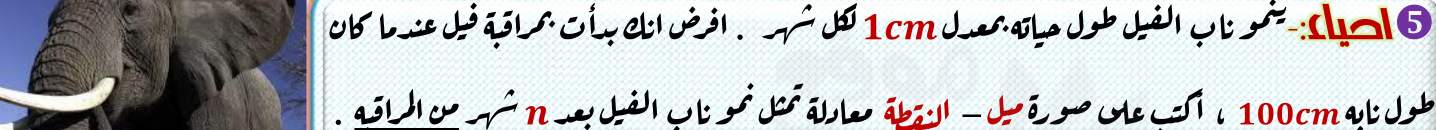
$y = mx + k$

$y = \frac{-2}{3}x + 2$

$\left[y = \frac{-2}{3}x + 2\right] (\times 3)$

$3y = -2x + 6$

$3y + 2x = 6$



⑤ احياء:- ينمو ناب الفيل طول حياته بمعدل 1cm لكل شهر . افرض انك بدأت بمراقبة فيل عندما كان طول نابه 100cm ، أكتب على صورة ميل – النقطة معادلة تمثل نمو ناب الفيل بعد n شهر من المراقبة .

**الجواب**

نكون الجدول التالي.....



| الزمن\شهر | 0 | 1 | 2 | -- | n |
|---|---|---|---|---|---|
| نمو الناب | 100 | 101 | 102 | -- | 100 + n |

والمطلوب هو المعادلة بعد n من المراقبة

اذن سوف نستخدم النقطتين $(0, 100), (1, 101)$ ($x_1 \; y_1 \; x_2 \; y_2$)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{101 - 100}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$

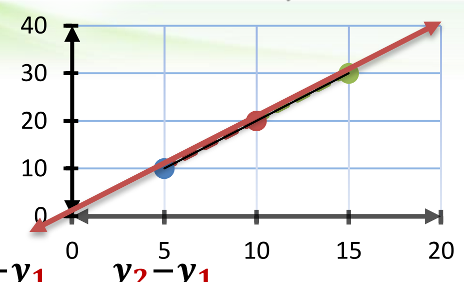
نكتب معادلة ميل – النقطة ثم نعوض فيها الميل والنقطة

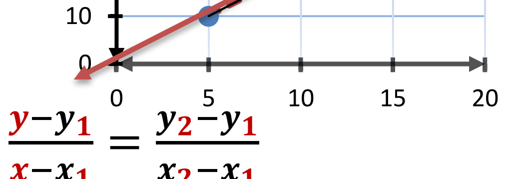
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 100 = 1(x - 0)$

$y - 100 = x \Rightarrow y = x + 100$

$y = n + 100$ معادلة نمو الناب بعد n شهر من المراقبة





⑥ **فيزياء:-** التمثيل البياني المجاور يبين كمية المياه المتسربة من خزان خلال مدة زمنية محددة .
أكتب على صورة نقطتين معادلة تمثل تسرب المياه بعد $n$ من الزمن .

**الجواب** نأخذ أي نقطتين $(10,20)$ و$(5,10)$ ونعوض بالقانون
$x_2\ y_2 \quad x_1\ y_1$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-10}{x-5}=\frac{20-10}{10-5}\Rightarrow\frac{y-10}{x-5}=\frac{10}{5}\Rightarrow\frac{y-10}{x-5}=\frac{2}{1}$$

$$y-10=2(x-5)\Rightarrow y-10=2x-10$$

$$y=2x-10+10\Rightarrow y=2x$$





## فكر

**اولاً تفكير ناقد** هل يوجد مستقيم ميله 4 ويمر في النقطتين $(5,7),(8,-2)$ ؟ ان وجد مستقيم كهذا فاكتب معادلته ؟والا علل اجابتك ؟

**SOL:** نعوض النقطتين $(5,7),(8,-2)$ في القانون الاتي لايجاد الميل

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{-2-7}{8-5}$$

$$m=\frac{-9}{3}\Rightarrow m=-3$$

∴ لا يوجد مستقيم ميله 4 يمر بالنقطتين السابقتين لان المستقيم المار بالنقطتين ميله هو $-3$

**ثانياً تحدٍ** مستقيم تقاطعه الافقي النظير الجمعي لتقاطعه العمودي ويمر في النقطة $(2,3)$ ، أكتب معادلة الميل - النقطة لهذا المستقيم

**SOL:** نفرض ان تقاطعه العمودي في $a$ فتصبح النقطة $(a,0)$
بما ان التقاطع الافقي هو نظير التقاطع العمودي فيكون $-a$ وتصبح النقطة $(0,-a)$ نجد الميل من النقطتين السابقتين

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m=\frac{-a-0}{0-a}\Rightarrow m=\frac{-a}{-a}\Rightarrow m=1$$

نكتب معادلة ميل-نقطة ثم نعوض الميل والنقطة$(2,3)$ لكي نجد المعادلة

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-3=1(x-2)$$

$$y-3=x-2\Rightarrow y=x-2+3\Rightarrow y=x+1$$



**ثالثاً أيهما صحيح** معادلة مستقيم ميله $\frac{3}{5}$ ويمر بالنقطة $(-1,7)$
كتب احمد المعادلة بشكل $y-7=\frac{5}{3}(x+1)$ وكتب محمد المعادلة بشكل $y-7=\frac{3}{5}(x+1)$ أيهما اجابته صحيحة؟

**SOL:** نعوض النقطة $(-1,7)$ والميل $m=\frac{3}{5}$ في القانون الاتي

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-7=\frac{3}{5}(x-(-1))$$

$$y-7=\frac{3}{5}(x+1)$$

اذن اجابة محمد هي الصحيحة . ✓






رابعاً اكتب مسألة من واقع الحياة يمكن تمثيلها بمعادلة الخط المستقيم .

**الجواب :** يصرف احد طلاب الثالث متوسط في اليوم الواحد 5 الأف دينار . أكتب معادلة ميل - نقطة . لما يصرفه ل $n$ من الايام .
ثم مثلها في المستوي الاحداثي . H.W

**مراجعة**

حالات كتابة معادلة المستقيم .

| الحالات | المعطيات في السؤال | قانون المعادلة |
|---|---|---|
| ❶ نقطتان | $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ | $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ |
| ❷ ميل – نقطة | $A(x_1,y_1)$ , $m$ | $y-y_1=m(x-x_1)$ |
| ❸ ميل - مقطعه الصادي | $K$ , $m$ | $y=mx+k$ |

حالات ايجاد ميل المستقيم .

| معطيات السؤال | القانون |
|---|---|
| ❶ نقطتان $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ | $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ |
| ❷ معادلة المستقيم ومقطعه الصادي | نجد الميل بالمقارنة مع $y=mx+k$ |
| ❸ نقطة و معادلة المستقيم | نجد الميل بالمقارنة مع $y-y_1=m(x-x_1)$ |

**ملاحظة:**
في موضوع سابق من الجزء الاول / الفصل الاول / التطبيقات / هو كيفية كتابة قاعدة الاقتران عندما يعطي الازواج المرتبة يمكن ان نستفاد من معادلة المستقيم $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ في كتابة قاعدة الاقتران باختيار اي زوجين مرتبين .






## الدرس [3-4] معادلة المستقيم

## The Equation of the Line

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-2,-3),(-1,-7)$ هي:

a) $y - 4x = -11$ b) $y - 4x = 11$ c) $4y + x = -11$ ✓ d) $y + 4x = -11$

2 المستقيم الذي معادلته $y + x = 0$ ، ميله واحدى نقاطه هما:

a) $m = -1, (4,4)$ b) $m = 1, (4,4)$ ✓ c) $m = -1, (4,-4)$ d) $m = 1, (-4,-4)$

3 استعمل معادلة المستقيم $y = mx + k$ وجد قيمة $k, m$ للمستقيم $7y - 3x = 21$:

a) $m = \frac{3}{7}, k = -3$ b) $m = \frac{7}{3}, k = 3$ c) $m = \frac{3}{7}, k = -3$ ✓ d) $m = \frac{3}{7}, k = 3$

4 اي النقط التالية تقع على المستقيم الذي معادلته: $y + 4x = 0$

a) $(1,4)$ b) $(4,-1)$ c) $(4,1)$ ✓ d) $(1,-4)$

5 معادلة المستقيم الذي ميله $(-1)$ ومقطعه الصادي يساوي $(-2)$ هو:

a) $y + x - 2 = 0$ ✓ b) $y + x + 2 = 0$ c) $y + x - 2 = 0$ d) $y - x - 2 = 0$

6 ما هي على صورة الميل - التقاطع معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-1,-2),(1,6)$

a) $y = -3x + 6$ b) $y = 4x - 2$ ✓ c) $y = 4x + 2$ d) $y = 2x + 4$

7 ثمن وجبة طعام في احد المطاعم 25 الف دينار، مضافاً اليها 3 الاف دينار لكل نوع اضافي من المقبلات، اي المعادلات تمثيل ثمن وجبة طعام مع $(x)$ من المقبلات؟

a) $y = 25x + 3$ b) $y = 25x - 3$ ✓ c) $y = 3x + 25$ d) $y = 3x - 25$




## الدرس (4-4) المستقيمات المتوازيه والمتعامده

في هذا الدرس سوف نميز بين المستقيمات المتوازية والمستقيات المتعامدة من خلال ميولها $m$

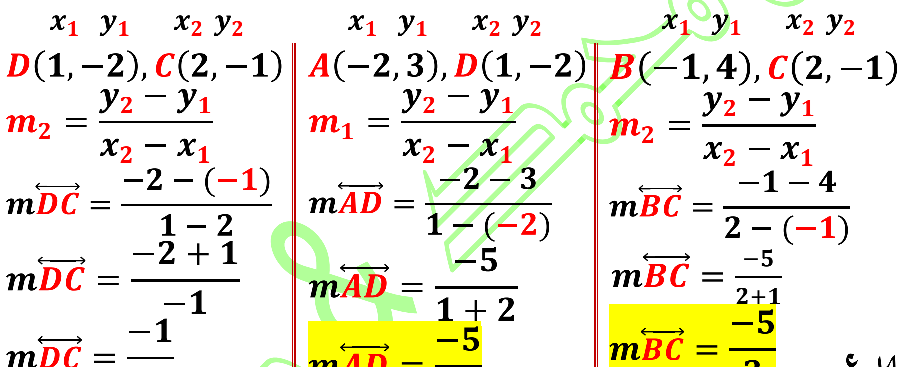
### اولاً المستقيمات المتوازيه: حيث // رمز التوازي

المستقيمان المتوازيان يقعان في مستوي واحد وليس بينهما نقطة مشتركة ونستدل على ان هذين المستقيمين متوازيين من خلال العلاقة الرياضية التالية $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2} \Longleftrightarrow m_1 = m_2$ . اذا كان المستقيمان متوازيان فأن ميلهما متساويان والعكس صحيح

**مثال 1** بين ان النقاط الاتية $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ تمثل رؤوس متوازي الاضلاع باستعمال الميول

نمثل النقاط في المستوي الاحداثي لكي نحدد المستقيمات المتقابلة و نجد ميولها

SOL:



$A(-2,3), B(-1,4)$ ($x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$)

$m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{4-3}{-1-(-2)}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{1}{-1+2}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{1}{1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = 1$

$D(1,-2), C(2,-1)$ ($x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$)

$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{DC} = \dfrac{-2-(-1)}{1-2}$

$m\overleftrightarrow{DC} = \dfrac{-2+1}{-1}$

$m\overleftrightarrow{DC} = \dfrac{-1}{-1}$

$m\overleftrightarrow{DC} = 1$

$\because m_1 = m_2 \Leftrightarrow \therefore \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DC}$

$A(-2,3), D(1,-2)$ ($x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$)

$m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AD} = \dfrac{-2-3}{1-(-2)}$

$m\overleftrightarrow{AD} = \dfrac{-5}{1+2}$

$m\overleftrightarrow{AD} = \dfrac{-5}{3}$

$B(-1,4), C(2,-1)$ ($x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$)

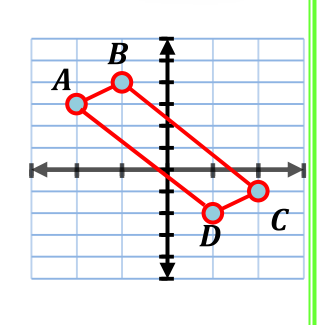
$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-1-4}{2-(-1)}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-5}{2+1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-5}{3}$

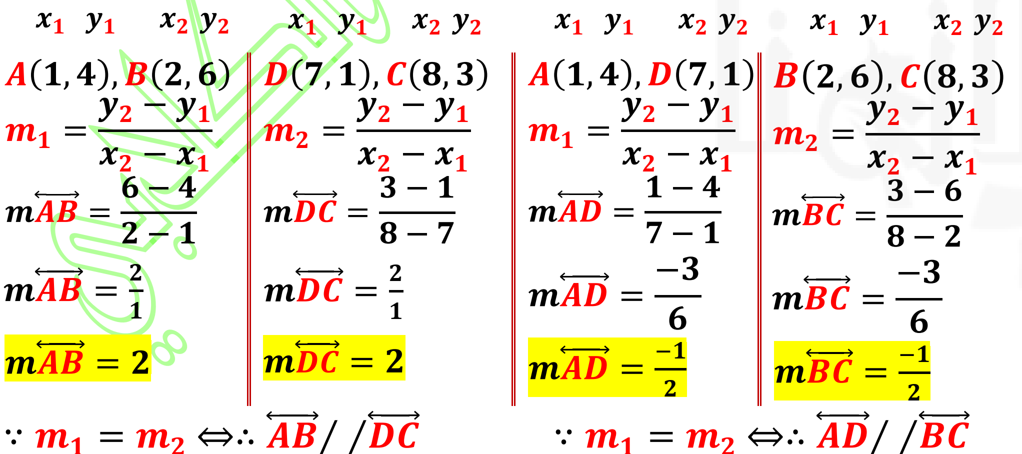
$\because m_1 = m_2 \Leftrightarrow \therefore \overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$




∴ الشكل يمثل متوازي الاضلاع لان كل ضلعين متقابلين متوازيين خواص متوازي الاضلاع

**مثال 2** برهن على ان الشكل $ABCD$ مستطيل حيث نقاطه هي $A(1,4), B(2,6), C(8,3), D(7,1)$ .

SOL:



$A(1,4), B(2,6)$ ($x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$)

$m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{6-4}{2-1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{2}{1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = 2$

$D(7,1), C(8,3)$ ($x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$)

$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{DC} = \dfrac{3-1}{8-7}$

$m\overleftrightarrow{DC} = \dfrac{2}{1}$

$m\overleftrightarrow{DC} = 2$

$\because m_1 = m_2 \Leftrightarrow \therefore \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DC}$

$A(1,4), D(7,1)$ ($x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$)

$m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AD} = \dfrac{1-4}{7-1}$

$m\overleftrightarrow{AD} = \dfrac{-3}{6}$

$m\overleftrightarrow{AD} = \dfrac{-1}{2}$

$B(2,6), C(8,3)$ ($x_1\ y_1 \quad x_2\ y_2$)

$m_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

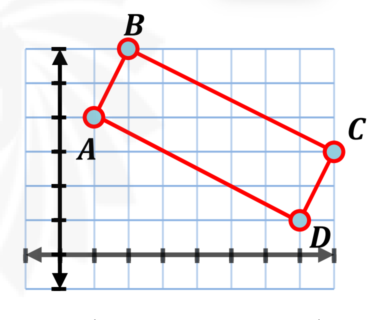
$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{3-6}{8-2}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-3}{6}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-1}{2}$

$\because m_1 = m_2 \Leftrightarrow \therefore \overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$

$\because \dfrac{-1}{2} \times 2 = -1 \quad \therefore \quad \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{CD}$




∴ الشكل يمثل مستطيل لان كل ضلعين متقابلين متوازيين والضلعين الاخرين متعامدين. خواص المستطيل

**H.W**

❶ برهن ان الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع حيث $A(3,0), B(0,4), C(-3,0), D(0,-4)$ بأستعمال الميول .

❷ بين ان النقاط التالية $A(4,-1), B(2,2), C(-2,4), D(0,4)$ رؤوس متوازي الاضلاع $ABCD$ بأستعمال الميول .

❸ برهن أن الشكل $ABCD$ الذي رؤوسه $A(3,1), B(-1,3), C(-3,-1), D(1,-3)$ متوازي الاضلاع بأستخدام الميول .

**مثال 3** أثبت ان النقاط $A(-2,-1), B(-1,0), C(2,3)$ تقع على استقامة واحدة .

لاثبات نقاط تقع على استقامه واحده بواسطة الميول نجد ميلين لنقطتين مختلفتين $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ او $\overleftrightarrow{AC}$ فاذا كان الميلين متساوين فان النقاط تقع على استقامه واحده

**SOL:**

$A(-2,-1), B(-1,0)$

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{0-(-1)}{-1-(-2)}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{0+1}{-1+2}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{1}{1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = 1$

$B(-1,0), C(2,3)$

$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3-0}{2-(-1)}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3}{2+1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3}{3}$

$m\overleftrightarrow{BC} = 1$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{BC} = 1$

$\therefore$ النقاط $ABC$ تقع على استقامة واحدة .



**مثال 4** هل النقاط $A(0,-7), B(1,-1), C(2,3)$ تقع على استقامة واحدة ؟ بين ذلك .



**SOL:**

$A(0,-7), B(1,-1)$

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-1-(-7)}{1-0}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-1+7}{1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{6}{1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = 6$

$B(-1,0), C(2,3)$

$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3-(-1)}{2-1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3+1}{1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{4}{1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = 4$

$\because m\overleftrightarrow{AB} \neq m\overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ النقاط $ABC$ لاتقع على استقامة واحدة .

ملاحظة / اذا كان السؤال على صيغة ( هل ) يكون الجواب اما يتحقق او لا يتحقق ، واذا كان السؤال على صيغة ( اثبت ) او ( برهن ) يجب ان يكون الجواب يتحقق المطلوب .

**H.W**

❶ اثبت ان النقاط $A(0,-1), B(4,2), C(8,5)$ تقع على استقامة واحدة باستعمال الميول .

❷ باستعمال الميول بين ان النقاط التالية تقع على استقامة واحدة $A(3,2), B(0,-1), C(1,0)$ .

**مثال 5** جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(5,3)$ والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $A(4,5), B(2,-3)$ .

**SOL:**

$A(4,5), B(2,-3) \Rightarrow m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-3-5}{2-4} \Rightarrow m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-8}{-2} \Rightarrow m\overleftrightarrow{AB} = 4$

بما انه المستقيم $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ اذاً نجد الميل من $\overleftrightarrow{L_2}$ وهو يساوي ميل $\overleftrightarrow{L_1}$ لانهما متوازيان

$y - y_1 = m(x - x_1)$ , $m = 4$ , $C(5,3)$

الان اصبح لدينا ميل __ نقطة نعوض في القانون $y - y_1 = m(x - x_1)$ لإيجاد معادلة المستقيم

$y - 3 = 4(x - 5)$

$y - 3 = 4x - 20$

$y = 4x - 20 + 3$

$y = 4x - 17$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ المطلوبة




**مثال 6** جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0,3)$ والموازي للمستقيم الذي ميله $\frac{-2}{3}$ .

**SOL:** $y - y_1 = m(x - x_1)$ , $m = \frac{-2}{3}$ , $(0,3)$

$\because \overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Leftarrow m\overleftrightarrow{L_1} = m\overleftrightarrow{L_2}$ الان من ميل ونقطة نجد معادلة المستقيم

$y - 3 = \frac{-2}{3}(x - 0)$

$\left(y - 3 = \frac{-2}{3}x\right) \times 3$

$3y = -2x + 9$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ المطلوبة

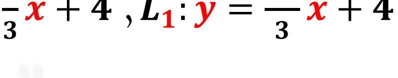
**H.W**

1. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2,5)$ والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $(1,3),(3,-1)$ .
2. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(1,-1)$ والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $(3,-2),(6,0)$ .

**مثال 7** ليكن $\overleftrightarrow{L_1}: y = \frac{-5}{3}x + 4$ , $\overleftrightarrow{L_2}: y = \frac{5}{3}x + 4$ و $\overleftrightarrow{L_3}: y = \frac{-5}{3}x - 4$ اي المستقيمات متوازية ولماذا ؟




**SOL:** $y = mx + k$ بالمقارنة مع معادلة المستقيم ميل - مقطع صادي



$\overleftrightarrow{L_1}: y = \frac{-5}{3}x + 4 \Rightarrow m = \frac{-5}{3}$ , $k = 4$

$\overleftrightarrow{L_2}: y = \frac{5}{3}x + 4 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$ , $k = 4$

$\overleftrightarrow{L_3}: y = \frac{-5}{3}x - 4 \Rightarrow m = \frac{-5}{3}$ , $k = -4$

$\therefore \overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_3}$ لان لهما نفس الميل





## ثانياً المستقيمات المتعامدة: حيث $\perp$ رمز التعامد

المستقيمان المتعامدان يلتقيان في نقطة واحدة ويصنعان اربعة زوايا قائمة ويقعان في مستوي واحد ونستدل على ان المستقيمين متعامدين من خلال العلاقة الرياضي التالية

$$m_1 \times m_2 = -1 \quad \text{او} \quad m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

، حيث $m_1$ و $m_2$ ميل المستقيمين .

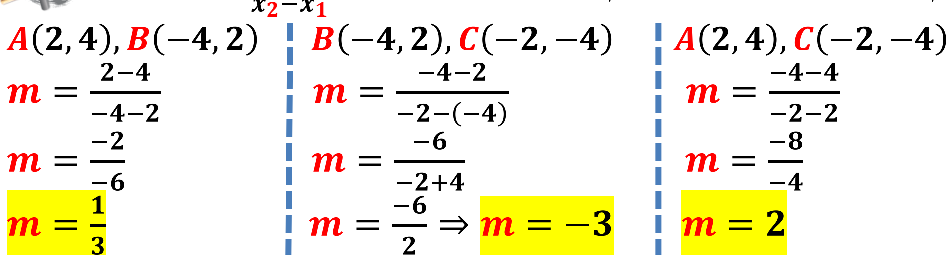
☚ اذا كان المستقيمان متعامدان فأن ميل احدهما هو مقلوب ميل الاخر وعكس اشارته .

مثال 8

بين ان النقاط الاتية $A(2,4), B(-4,2), C(-2,-4)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية ؟ثم حدد الزاوية القائمة فيه؟

SOL:

نجد الميول لكل المستقيمات $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}$ ثم نلاحظ أي مستقيمين حاصل ضربهم يساوي $-1$   $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$



$A(2,4), B(-4,2)$

$m = \frac{2-4}{-4-2}$

$m = \frac{-2}{-6}$

$m = \frac{1}{3}$

$B(-4,2), C(-2,-4)$

$m = \frac{-4-2}{-2-(-4)}$

$m = \frac{-6}{-2+4}$

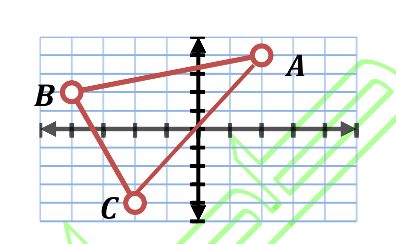
$m = \frac{-6}{2} \Rightarrow m = -3$

$A(2,4), C(-2,-4)$

$m = \frac{-4-4}{-2-2}$

$m = \frac{-8}{-4}$

$m = 2$




$\therefore m\overleftrightarrow{AB} \times m\overleftrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$   المثلث قائم الزاوية في $B$ لانه يحتوي ضلعين قائمين

نختار اكثر حرف متكرر في الاضلاع القائمة لنقول هذه المثلث قائم الزاوية في هذه الحرف

**H.W**

❶ برهن ان $\Delta ABC$ حيث $A(-5,-7), B(-8,-2), C(-4,-3)$ ، قائم الزاوية ؟ثم حدد الزاوية القائمة ؟

❷ بين ان المثلث الذي رؤوسه $A(0,-4), B(-1,0), C(7,2)$ مثلث قائم الزاوية .

مثال 9

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(3,-4)$ والعمودي على المستقيم المار بالنقطتين $A(0,3), B(2,-2)$ .

($x_1$ $y_1$ ، $x_2$ $y_2$)


SOL:

نجد الميل للمستقيم $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{L_2}$

بما ان المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ المار بالنقطة $C(3,-4)$ عمودي على المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ .

$\therefore$ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ هو مقلوب ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ وعكس الاشارة

$\frac{2}{5} = m\overleftrightarrow{L_1} \therefore$ سوف نستخدم معادلة ميل__نقطة لايجاد معادلة المستقيم



$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-2-3}{2-0} = \frac{-5}{2}$

مقلوب $\frac{-5}{2}$ هو $\frac{-2}{5}$ و عكس الاشارة هو سالب يصبح موجب $\frac{2}{5}$

$m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{2}{5}$ , $C(3,-4)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\left(y - (-4) = \frac{2}{5}(x-3)\right) \times 5$   نضرب طرفي المعادلة ب 5 لكي نتخلص من الكسر

$5y + 20 = 2(x-3)$

$5y + 20 = 2x - 6 \Rightarrow 5y = 2x - 26$

$y = \frac{2}{5}x - \frac{26}{5}$   معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$




مثال 10

جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(2,5)$ والعمودي على المستقيم المار بالنقطتين $A(1,3), B(3,-1)$

نجد الميل للمستقيم $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{L_2}$

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{-1-3}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$

بما ان المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ المار بالنقطة $C(3,-4)$ عمودي على المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$.

∴ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ هو مقلوب ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ وعكس الاشارة اذن $m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{1}{2}$

∴ سوف نستخدم معادلة ميل_نقطة لايجاد معادلة المستقيم

$m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{1}{2}$ , $C(2,5)$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}(x-2)$

$y - 5 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(2) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}x - 1$

$y = \frac{1}{2}x - 1 + 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$

H.W : جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(-4,0)$ والعمودي على المستقيم المار بالنقطتين $A(3,-2), B(6,0)$ .

مثال 11

جد قيمة $a$ التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(a,-4), (3,1)$ عمودي على المستقيم الذي ميله $\frac{-1}{5}$ .



∵ المستقيمين متعامدين

∴ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$ المار بالنقطتين هو مقلوب ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ وعكس اشارته $m\overleftrightarrow{L_1} = 5$

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ , $(3,1), (a,-4)$ , $m = 5$

$5 = \frac{-4-1}{a-3} \Rightarrow \frac{5}{1} = \frac{-5}{a-3} \Rightarrow 5(a-3) = -5$

$5a - 15 = -5 \Rightarrow 5a = -5 + 15 \Rightarrow [5a = 10] \div 5$

$a = 2$

مثال 12

المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ يمر بالنقطتين $A(-2,4), B(a,6)$ وعمودي على المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ الذي يمر بالنقطتين $C(6,-6), D(2,-7)$ جد قيمة $a$

نجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ , $C(6,-6), D(2,-7)$

$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-7-(-6)}{2-6} \Rightarrow m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-7+6}{-4} \Rightarrow m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-1}{-4} \Rightarrow m\overleftrightarrow{CD} = \frac{1}{4}$

بما ان المستقيمين متعامدين
اذاً ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$
ميل المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ وعكس اشارته .
$\therefore m\overleftrightarrow{AB} = -4$

$m\overleftrightarrow{AB} = -4$ , $A(-2,4), B(a,6)$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow -4 = \frac{6-4}{a-(-2)} \Rightarrow -4 = \frac{2}{a+2} \Rightarrow -4(a+2) = 2$

$-4a - 8 = 2 \Rightarrow -4a = 2 + 8 \Rightarrow [-4a = 10] \div (-4)$

$a = \frac{10}{-4} \Rightarrow a = \frac{-5}{2}$

H.W : جد قيمة $a$ التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3,2), (6,a)$ يساوي $\frac{-1}{4}$ .

مثال 13

باستعمال الميل بين ان المستقيم المار بالنقطتين $A(3,1), B(4,-1)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $C(4,-1), D(0,-3)$ .

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $C(4,-1), D(0,-3)$

$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-3-(-1)}{0-4} \Rightarrow m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-3+1}{-4}$

$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow m\overleftrightarrow{CD} = \frac{1}{2}$

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ , $A(3,1), B(4,-1)$

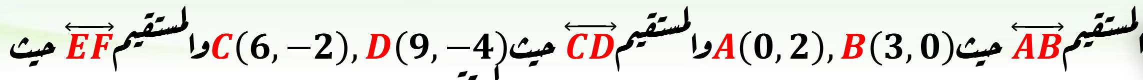
$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-1-1}{4-3} \Rightarrow m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-2}{1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = -2$

$\because m\overleftrightarrow{AB} \times m\overleftrightarrow{CD} = -2 \times \frac{1}{2} = -1 \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

المستقيمان متعامدان لان حاصل ضرب الميول يساوي $-1$



المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ حيث $A(0,2), B(3,0)$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ حيث $C(6,-2), D(9,-4)$ والمستقيم $\overleftrightarrow{EF}$ حيث $E(0,-5), F(2,-2)$ ، ما علاقة $\overleftrightarrow{AB}$ بالمستقيمين $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{EF}$ بين ذلك ؟

SOL:

نجد الميل لكل المستقيمات $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{EF}$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$E(0,-5), F(2,-2)$

$$m\,\overleftrightarrow{EF} = \frac{-2-(-5)}{2-0}$$

$$m\,\overleftrightarrow{EF} = \frac{-2+5}{2}$$

$$m\,\overleftrightarrow{EF} = \frac{3}{2}$$

$C(6,-2), D(9,-4)$

$$m\,\overleftrightarrow{CD} = \frac{-4-(-2)}{9-6}$$

$$m\,\overleftrightarrow{CD} = \frac{-4+2}{3}$$

$$m\,\overleftrightarrow{CD} = \frac{-2}{3}$$

$A(0,2), B(3,0)$

$$m\,\overleftrightarrow{AB} = \frac{0-2}{3-0}$$

$$m\,\overleftrightarrow{AB} = \frac{-2}{3}$$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ لأنه $m\,\overleftrightarrow{AB} = m\,\overleftrightarrow{CD} = \frac{-2}{3}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{EF}$ لأنه $m\,\overleftrightarrow{AB} \times m\,\overleftrightarrow{EF} = \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$




1 **فيزياء** :- يمثل الجدول المجاور كمية المياه المتدفقة من احد سدود خلال فترة معينة من الزمن هل بيانات الجدول تمثل خط مستقيم ؟ بين ذلك .

| المياه المتدفقة | |
|---|---|
| $m^3$ \ حجم الماء | الزمن \ ثانيه |
| 75000 | 5 |
| 150000 | 10 |
| 225000 | 15 |




نجد الميل بين كل نقطتين $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(5,75000), (15,225000)$

$$m_3 = \frac{225000-75000}{15-5}$$

$$m_3 = \frac{150000}{10}$$

$$m_3 = 15000$$

$(10,150000), (15,225000)$

$$m_2 = \frac{225000-150000}{15-10}$$

$$m_2 = \frac{75000}{5}$$

$$m_2 = 15000$$

$(5,75000), (10,150000)$

$$m_1 = \frac{150000-75000}{10-5}$$

$$m_1 = \frac{75000}{5}$$

$$m_1 = 15000$$

$\therefore$ كل النقاط تقع على استقامة واحدة $\because\ m_1 = m_2 = m_3$

2 **هندسة** :- برهن ان الشكل $ABCD$ شبه منحرف حيث احداثيات القاعدة العليا $(4,5), (6,2)$ والقاعدة السفلى $(-2,5), (2,-1)$ هل هو قائم الزاوية ؟ بين ذلك .

الجواب

ميل القاعدة العليا $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ميل القاعدة السفلى

$(4,5), (6,2)$

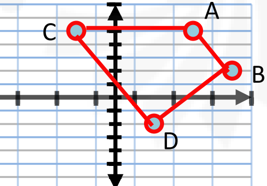
$$m_{AB} = \frac{2-5}{6-4}$$

$$m_{AB} = \frac{-3}{2}$$

$(-2,5), (2,-1)$

$$m_{CD} = \frac{-1-5}{2-(-2)} = \frac{-6}{2+2}$$

$$m_{CD} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$




$\because\ m_{AB} = m_{CD} = \frac{-3}{2}$

$\therefore\ \overline{AB} // \overline{CD}$

$(4,5), (-2,5)$

$$m_{AC} = \frac{5-5}{-2-4}$$

$$m_{AC} = \frac{0}{-6} = 0$$

$(6,2), (2,-1)$

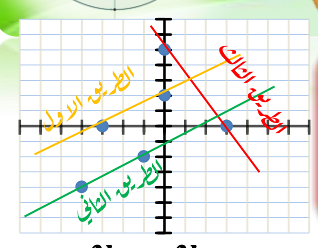
$$m_{BD} = \frac{-1-2}{2-6}$$

$$m_{BD} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ الشكل شبه منحرف حسب خواص شبه المنحرف القاعدة العليا توازي القاعدة السفلى

$\therefore$ غير قائم الزاوية $\because\ m_{AC} \times m_{BD} = 0 \times \frac{3}{4} \neq -1$





③ **خريطة** :- استعمل الخريطة المجاورة لتبين أن : ① الطريق الاول يوازي الطريق الثاني

② الطريق الثاني عمودي على الطريق الثالث . ③ هل الطريق الاول عمودي على الطريق الثالث ؟ بين ذلك

**الجواب** نجد نقطتين لكل مستقيم من النقاط التي يمر بها كل مستقيم ثم نجد ميل كل مستقيم ثم نقارن

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

① $(-3,0),(0,2)$

$m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{2-0}{0-(-3)}$

$m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{2}{3}$

$(-1,-2),(-4,-4)$

$m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{-4-(-2)}{-4-(-1)}$

$m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{-4+2}{-4+1}$

$m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$\because m\overleftrightarrow{L_1} = m\overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow \therefore \overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

∴ الطريق الاول يوازي الطريق الثاني لان ميولهما متساوية

② $(3,0),(0,5)$

$m\overleftrightarrow{L_3} = \frac{5-0}{0-3}$

$m\overleftrightarrow{L_3} = \frac{5}{-3}$

$m\overleftrightarrow{L_3} = \frac{-5}{3}$

$m\overleftrightarrow{L_3} \times m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{-5}{3} \times \frac{2}{3} \neq -1$

∴ الطريق الثاني غير عمودي على الطريق الثالث

لان حاصل ضرب ميولهما لا تساوي $-1$

③

$m\overleftrightarrow{L_1} \times m\overleftrightarrow{L_3} = \frac{2}{3} \times \frac{-5}{3} \neq -1$

الطريق الاول غير عمودي على الطريق الثالث

لان حاصل ضرب ميولهما لاتساوي $-1$

## فكــر

**اولاً تحدٍ** هل النقاط الاتية : $(2,3),(4,5),(-1,0),(-2,-1)$ تقع على استقامة واحدة ؟ بين ذلك .



SOL:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نجد ميول كل نقطة مع الاخرى
عندما يعطي في السؤال اربع نقاط يجب ان
نجد ثلاث ميول

$(-2,-1),(-1,0)$

$m_1 = \frac{0-(-1)}{-1-(-2)}$

$m_1 = \frac{0+1}{-1+2}$

$m_1 = \frac{1}{1}$

$m_1 = 1$

$(-1,0),(4,5)$

$m_2 = \frac{5-0}{4-(-1)}$

$m_2 = \frac{5}{4+1}$

$m_2 = \frac{5}{5}$

$m_2 = 1$

$(4,5),(2,3)$

$m_3 = \frac{3-5}{2-4}$

$m_3 = \frac{-2}{-2}$

$m_3 = 1$

$\because m_1 = m_2 = m_3 = 1$ النقاط تقع على استقامة واحدة لان جميع الميول متساوية



**ثانياً اصحح الخطأ** قال احمد ان المستقيم المار بالنقطتين $(-3,0),(0,4)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(0,0),(1,\frac{3}{4})$

اكتشف خطأ احمد و صححه

SOL:

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(-3,0),(0,4)$

$m_1 = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{0+3} = \frac{4}{3}$

$(1,\frac{3}{4}),(0,0)$

$m_2 = \frac{0-\frac{3}{4}}{0-1} = \frac{\frac{-3}{4}}{-1} = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{-1} = \frac{3}{4}$

$m_1 \times m_2 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1 \neq -1$

∴ المستقيمين غير متعامدين لان حاصل ضرب ميلهما لا يساوي $-1$



خطأ احمد انه ذكر ان المستقيمين متعامدين




**ثالثاً مسألة مفتوحة** المعادلتين الاتيتين : $3y - 5x = 15$ , $3y - 5x = 20$ تمثلان مستقيمين متوازيين ما التشابه والاختلاف بينهما ؟ وضح ذلك .

SOL:

نقارن المعادلتين بمعادلة المستقيم ميل – مقطع الصادي

$$y = mx + k$$

$$\overleftrightarrow{L_1}: 3y - 5x = 15 \Rightarrow [3y = 5x + 15](\div 3)$$

$$y = \frac{5x}{3} + 5 \Rightarrow m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{5}{3} \quad , \quad k_1 = 5$$

$$\overleftrightarrow{L_2}: 3y - 5x = 20 \Rightarrow [3y = 5x + 20](\div 3)$$

$$y = \frac{5x}{3} + \frac{20}{3} \Rightarrow m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{5}{3} \quad , \quad k_2 = \frac{20}{3}$$

∴ التشابه هو $m\overleftrightarrow{L_1} = m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{5}{3}$

الاختلاف هو $k_1 \neq k_2$

**رابعاً تبرير** لماذا تقع النقاط التالية على مستقيم يوازي محور السينات $(-1,4),(0,4),(2,4)$ ؟

SOL:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

| $(-1,4),(0,4)$ | $(0,4),(2,4)$ |
|---|---|
| $m_1 = \frac{4-4}{0-(-1)}$ | $m_2 = \frac{4-4}{2-0}$ |
| $m_1 = \frac{0}{1} = 0$ | $m_2 = \frac{0}{2} = 0$ |

$$m_1 = m_2 = 0$$

اذا كان الميل يساوي صفر فان المستقيم يوازي محور السينات

**خامساً ايهما اصح** قالت سارة ان ميل المستقيم $5y + 2x = 10$ هو $\frac{2}{5}$ ومقطعه 2 وقال مهند ان ميله $\frac{-2}{5}$ ومقطعه 2 بين اجابة أي منهما الصحيحة

SOL:

نقارن المعادلة بمعادلة المستقيم ميل – مقطع الصادي

$$y = mx + k$$

$$5y + 2x = 10 \Rightarrow [5y = -2x + 10](\div 5)$$

$$y = \frac{-2x}{5} + \frac{10}{5} \Rightarrow y = \frac{-2x}{5} + +2$$

بالمقارنة

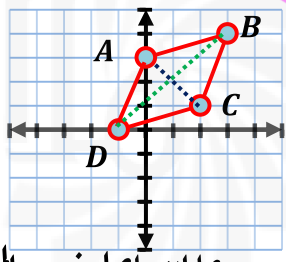
$$\therefore m = \frac{-2}{5} \quad , \quad k = 2$$

∴ جواب مهند هو الصحيح ✓

**سادساً مسألة مفتوحة** $ABCD$ معين رؤوسه $A(0,3), B(3,4), C(2,1), D(-1,0)$ برهن ان قطريه متعامدان .

SOL:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$




| $A(0,3), C(2,1)$ | $B(3,4), D(-1,0)$ |
|---|---|
| $m\overleftrightarrow{AC} = \frac{1-3}{2-0}$ | $m\overleftrightarrow{BD} = \frac{-1-3}{0-4}$ |
| $m\overleftrightarrow{AC} = \frac{-2}{2} = -1$ | $m\overleftrightarrow{BD} = \frac{-4}{-4} = 1$ |

$$m\overleftrightarrow{AC} \times m\overleftrightarrow{BD} = -1 \times 1 = -1$$

بما ان حاصل ضرب الميلين يساوي $-1$ اذاً القطران متعامدان

**سابعاً مسألة مفتوحة** ما اوجه التشابه والاختلاف بين المستقيمين المتوازيين ؟

الجواب : وجه التشابه ☚ ميول المستقيمين متساويين $m_1 = m_2$ وجه الاختلاف ☚ مقطعها الصادي غير متساوي $k_1 \neq k_2$ .


اعداد التربويين مصطفى محمد ▸ صفاء الكلابي







ما اذا كان المستقيمان متوازيان او متعامدين باستعمال ميلهما ؟

المستقيمان التوازيان $m_1 = m_2$ المستقيمان المتعامدان $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ او $m_1 \times m_2 = -1$

مراجعة

| معطيات السؤال | القانون / طريقة الاجابة |
|---|---|
| ❶ اثبات النقاط رؤوس متوازي الاضلاع | نطبق قانون الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ على اربعة الاضلاع لكي نثبت ان كل ضلعين متقابلين متوازيين . |
| ❷ اثبات النقاط على استقامة واحدة | نطبق قانون الميل على مستقيمين اذا كان في السؤال ثلاث نقاط $ABC$ ، ونطبق القانون على ثلاث مستقيمات اذا اعطى في السؤال اربع نقاط $ABCD$ فاذا كانت ميولها متساوية فانها على استقامة واحدة . |
| ❸ نقطة $C$ و مستقيم موازي يمر بنقطتين $A, B$ | نجد ميل النقطتين وهو نفسه ميل النقطة $C$ لأنه متوازي ثم نطبق المعادلة ميل - نقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$ من خلال تعويض النقطة $C$ و ميل $AB$ |
| ❹ نقطة و مستقيم يوازي النقطة وميله معلوم | ميل النقطة يساوي ميل المستقيم لانهم متوازيان ثم نطبق معادلة ميل - نقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| ❺ نقاط رؤوس مثلث واثباته قائم الزاوية وايجاد الزاوية القائمة | نطبق قانون الميل على اضلاع المثلث واي ضلعين ميلهما مقلوب الاخر و عكس الاشارة فأن المثلث قائم الزاوية الحرف المكرر في الضلعين يمثل الزاوية القائمة |
| ❻ نقطة و مستقيم عمودي على $A, B$ | نطبق قانون الميل ثم نقلب الميل و نعكس اشارته لأنه متعامدين و نطبق المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| ❼ $a$ مجهولة في مستقيم يمر بنقطتين $A, B$ و عمودي على مستقيم $C, D$ | نجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ و نقلبه و نعكس اشارته لانه متعامد ثم نساويه مع ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ لايجاد قيمة $a$ ، اما اذا كان الميل معطى للمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ مباشرتاً نقلبه و نعكس اشارته ثم نساويه مع ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ لايجاد قيمة $a$ . |

**Multiple Choice** الاختيار من متعدد

## الدرس [4-4] المستقيمات المتوازية والمتعامدة

## Parallel and Perpendicular Lines

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1. المستقيم المار بالنقطتين $(1,9),(7,1)$ يوازي المستقيم الذي ميله:

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{-4}{3}$ ✓ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

2. اذا كان $m_2, m_1$ يمثلان ميلي مستقيمين متعامدين فأن:

a) $m1 + m2 = -1$ b) $\frac{m_1}{m_2} = -1$ c) $m_1 \times m_2 = -1$ ✓ d) $m_1 - m_2 = -1$

3. قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-1,4),(a,-1)$ تساوي $\frac{-5}{3}$ هي:

a) 4 b) -2 c) -4 d) 2 ✓

4. معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0,3)$ والعمودي على المستقيم الذي ميله $\frac{4}{3}$ هي:

a) $3y + 4x = 12$ b) $3y + 4x = -12$ c) $4y - 3x = 12$ d) $4y + 3x = 12$ ✓

5. اذا كان $m_1 = m_2$ يمثلان ميلي المستقيمين $L_1, L_2$ فأن:

a) $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$ b) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ ✓ c) $\overleftrightarrow{L_2}, \overleftrightarrow{L_1}$ متقاطعان d) ليس بينهما اي علاقة

6. اي المستقيمات الآتية توازي المستقيم الذي معادلته $6y-5x = 30$

a) $6y + 5x = 30$ b) $5y - 6x = 30$ c) $6y - 5x = 25$ ✓ d) $6y + 5x = 25$

7. اي المستقيمات الآتية عمودية على المستقيم الذي معادلته $3y+2x = 6$

a) $3y + 2x = -6$ b) $3y - 2x = -6$ c) $2y + 3x = 6$ d) $2y - 3x = 6$ ✓




الدرس (5-4)

## المسافة بين نقطتين

### اولاً قانون المسافة بين نقطتين :

ندرس في هذا الموضوع كيف ايجاد المسافة بين نقطتين في المستوي الاحداثي .فإذا كانت $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ نقطتين فأن المسافه بينهما تعطى بالقانون التالي: $\overline{AB} = d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ حيث $d$ هي المسافة

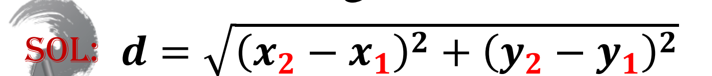
ولهذه القانون ثلاث تطبيقات نستخدم فيها هذه القانون. سوف نتطرق لها تباعاً.

### 1. اثبات نقاط على استقامة واحدة: من خلال الامثلة التالية تعلم كيف نثبت ان النقاط على استقامة واحده

**مثال 1** باستعمال قانون المسافة اثبت ان النقاط $A(-3,-2), B(0,1), C(3,4)$ تقع على استقامة واحدة.

❶ نكتب قانون المسافة ❷ نجد المسافة بين كل نقطتين مختلفتين وحسب المخطط . أي انه نجد المسافة بين $\overline{AB}$ ثم $\overline{BC}$ ثم $\overline{AC}$
❸ نقوم بكتابة الازواج المرتبة $A$ , $B$ ونكتب عليها المسقط السيني والصادي ثم نعوضها بالقانون
❹ نجد المسافات الثلاثة ثم نجمع اصغر مسافتين فإذا كانتا تساوي المسافة الثالثة الكبيرة فان النقاط تقع على استقامة واحدة
واذا كانت لا تساوى فان النقاط لا تقع على استقامة واحدة

SOL: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



$A(-3,-2), B(0,1)$

$\overline{AB} = \sqrt{(0-(-3))^2+(1-(-2))^2}$
$= \sqrt{(0+3)^2+(1+2)^2} = \sqrt{(3)^2+(3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \Rightarrow \overline{AB} = 3\sqrt{2}$

$B(0,1), C(3,4)$

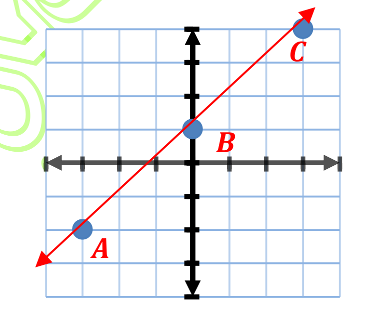
$\overline{BC} = \sqrt{(3-0)^2+(4-1)^2} = \sqrt{(3)^2+(3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \Rightarrow \overline{BC} = 3\sqrt{2}$

$A(-3,-2), C(3,4)$

$\overline{AC} = \sqrt{(3-(-3))^2+(4-(-2))^2} = \sqrt{(3+3)^2+(4+2)^2} = \sqrt{(6)^2+(6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} \Rightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{2}$

والان نجمع اصغر مسافتين $3\sqrt{2}+3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ نلاحظ ان مجموع المسافتين تساوي المسافة الكبير

اذن النقاط $A, B, C$ تقع على استقامة واحدة (على خط مستقيم واحد)




الرسم المجاور للتوضيح




ملاحظة: عندما لا يذكر في السؤال نوع الطريقة الذي يجب فيها اثبات النقاط على استقامة واحدة فهنالك طريقتين انت مخير اي طريقة تختار

الطريقة الاولى: باستخدام قانون الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ الذي تطرقنا له سابقاً في الدرس الثاني

الطريقة الثانية: باستخدام قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ الذي نحن بصدده في هذه الدرس

**مثال 2** باستعمال قانون المسافة بين هل النقط $A(-1,-3), B(-6,1), C(-3,3)$ تقع على استقامة واحدة.

SOL:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$A \rightarrow B \rightarrow C$ ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$)

$A(-1,-3), B(-6,1)$ ($x_1, y_1$ ; $x_2, y_2$)

$$\overline{AB} = \sqrt{(-6-(-1))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{(-6+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$B(-6,1), C(-3,3)$ ($x_1, y_1$ ; $x_2, y_2$)

$$\overline{BC} = \sqrt{(-3-(-6))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-3+6)^2 + (2)^2} = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$A(-1,-3), C(-3,3)$ ($x_1, y_1$ ; $x_2, y_2$)

$$\overline{AC} = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{(-3+1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

نجمع اصغر مسافتين $\sqrt{41} \neq \sqrt{40} + \sqrt{13}$ فنلاحظ لا تساوي المسافة الكبيرة \ اذن النقاط $A, B, C$ لا تقع على استقامة واحدة

**H.W**: باستعمال قانون المسافة هل ان النقاط تقع على استقامة واحدة

| ❸ $A(-3,4), B(3,2), C(0,5)$ | ❷ $A(1,-3), B(3,-4), C(-1,-2)$ | ❶ $A(-2,-1), B(-1,0), C(4,5)$ |
|---|---|---|

## 2. معرفة نوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه وهل يمثل قائم الزاوية ام لا:

من خلال الجدول ادناه سوف نتذكر انواع المثلث من حيث اطوال أضلاعه . ثم نتعرف كيف نعرف المثلث ما هو نوعه باستعمال قانون المسافة

A, B, C

| نوع المثلث | أضلاعه |
|---|---|
| متساوي الاضلاع | اذا كانت ثلاثة أضلاعه متساوية $AB = BC = AC$ |
| مختلف الاضلاع | اذا كانت ثلاثة أضلاعه مختلفة $AB \neq BC \neq AC$ |
| متساوي الساقين | اذا كان ضلعين متساويين فيه $AB = BC$ او $AB = AC$ او $AC = BC$ |

اما المثلث قائم الزاوية فيكون اذا حقق نظرية فيثاغورس $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ أي انه مجموع مربعات الضلعين الصغيرين يساوي مربع الضلع الاكبر




## مثال 3

بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(3,-4), B(5,-2), C(5,-6)$ من حيث اطوال اضلاعه وهل يمثل قائم الزاوية.

باستعمال قانون المسافة

SOL: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$A \xrightarrow{\overline{AB}} B \xrightarrow{\overline{BC}} C$ , $\overline{AC}$

$A(3,-4), B(5,-2)$: $\overline{AB}=\sqrt{(5-3)^2+(-2-(-4))^2}=\sqrt{(2)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{(2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$B(5,-2), C(5,-6)$: $\overline{BC}=\sqrt{(5-5)^2+(-6-(-2))^2}=\sqrt{(0)^2+(-6+2)^2}=\sqrt{0+(-4)^2}=\sqrt{16}=4$

$A(3,-4), C(5,-6)$: $\overline{AC}=\sqrt{(5-3)^2+(-6-(-4))^2}=\sqrt{(2)^2+(-6+4)^2}=\sqrt{4+(2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

نلاحظ ان المثلث متساوي الساقين لان $AB=AC=2\sqrt{2}$ \ اذن المثلث نوعه متساوي الساقين

ملاحظة: يفضل عند اختبار قائم الزاوية ان تأخذ طول الضلع مع الجذر التربيعي لأنه التربيع يلغي الجذر التربيعي (للسهوله)

ولمعرفة هل هو قائم : نأخذ مربع اصغر ضلعين ونجمعهم ثم نربع الضلع الأكبر

$(\sqrt{8})^2+(\sqrt{8})^2=8+8=16$

$(\sqrt{16})^2=16$

اذن المثلث قائم الزاوية لأنه حقق نظرية فيثاغورس \ مجموع مربع الضلعين يساوي مربع الضلع الاكبر



## مثال 4

هل النقط $A(0,1), B(3,-1), C(-2,-2)$ تمثل رؤوس مثلث قائم الزاوية؟ وبين نوعه من حيث اطوال اضلاعه؟

باستعمال قانون المسافة

SOL: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$A \xrightarrow{\overline{AB}} B \xrightarrow{\overline{BC}} C$ , $\overline{AC}$

$A(0,1), B(3,-1)$: $\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(3)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$B(3,-1), C(-2,-2)$: $\overline{BC}=\sqrt{(-2-3)^2+(-2-(-1))^2}=\sqrt{(-5)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

$A(0,1), C(-2,-2)$: $\overline{AC}=\sqrt{(-2-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

بما انه $AB=AC=\sqrt{13}$ اذن المثلث متساوي الساقين

$(\sqrt{13})^2+(\sqrt{13})^2=13+13=26$

$(\sqrt{26})^2=26$ ← نعم يمثل قائم الزاوية

**H.W:** بين نوع المثلث الذي رؤوس $A(2,-1), B(2,1), C(-1,-1)$ من حيث اطوال أضلاعه؟ وهل يمثل قائم الزاوية؟ باستعمال قانون المسافة




**مثال 5** بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(2,4), B(-4,2), C(-1,-2)$ من حيث اطوال أضلاعه ؟ وهل يمثل قائم الزاوية ؟

SOL: باستعمال قانون المسافة بين نقطتين

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$A(2,4), B(-4,2)$:
$$\overline{AB} = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$B(-4,2), C(-1,-2)$:
$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$A(2,4), C(-1,-2)$:
$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

بما انه $BC \neq AC \neq AB$ اذن المثلث مختلف الاضلاع

$$(\sqrt{40})^2 + (\sqrt{25})^2 = 40 + 25 = 65$$
$$(\sqrt{45})^2 = 45$$

اذن المثلث ليس قائم الزاوية

## 3. اثبات متوازي الاضلاع:

في متوازي الاضلاع يجب ان يكون كل ضلعين متقابلين متساويين .

**مثال 6** بين باستعمال قانون المسافة ان النقط $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ تمثل رؤوس متوازي الاضلاع

SOL:
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

سوف نجد المسافة لكل ضلعين متقابلين في متوازي الاضلاع

$A(-2,3), B(-1,4)$
$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (4-3)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(-1+2)^2 + (1)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$C(2,-1), D(1,-2)$
$$\overline{CD} = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-(-1))^2}$$
$$\overline{CD} = \sqrt{(-1)^2 + (-2+1)^2}$$
$$\overline{CD} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$\therefore AB = CD$

$A(-2,3), D(1,-2)$
$$\overline{AD} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-2-3)^2}$$
$$\overline{AD} = \sqrt{(1+2)^2 + (-5)^2}$$
$$\overline{AD} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$B(-1,4), C(2,-1)$
$$\overline{BC} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-1-4)^2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (-5)^2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$\therefore AD = BC$

اذن النقاط $A, B, C, D$ تمثل رؤوس متوازي اضلاع \ من خواص متوازي الاضلاع " كل ضلعين متقابلين متساويين "

ملاحظة: عندما لا يذكر في السؤال نوع الطريقة في اثبات متوازي الاضلاع فيمكن ان نحلها بطريقة الميل الذي مرت علينا سابقاً في الدرس $(4-4)$ والمثال 1 و2 في الدرس السابق يمكن ان تحلها بطريقة هذه الدرس . كواجب بيتي







## قانون نقطة المنتصف:

**نقطة المنتصف:** هي النقطة الواقعة على بعدين متساويين عن طرفي قطعة مستقيم وتنتمي له . لتكن النقطتين $A, B$ تقعان على المستقيم $\overline{AB}$

فأن $M$ نقطة منتصف المستقيم .

$A(x_1, y_1)$ —— $M(x, y)$ —— $B(x_2, y_2)$

ويمكن ايجادها بالقانون $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ تمثل زوج مرتب من مجموع السينات مقسومه على 2 ومجموع الصادات مقسومه على 2

**مثال 7** جد احداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين $A(3,-8), B(3,6)$

**SOL:** نكتب قانون المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \;\; y_1 \quad\; x_2 \;\; y_2 \\ A(3,-8), B(3,6) \end{matrix}\right\} M = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{-8+6}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right) \Rightarrow M = (3,-1)$$

$(3,-1)$ هي نقطة منتصف المستقيم $\overline{AB}$

**مثال 8** اذا كانت نقطتي رأسي المستقيم $\overline{AB}$ هما $A(-1,-2), B(3,-4)$ جد ❶ نقطة منتصف $A, B$ ❷ المسافة بين $A, B$

**SOL:**

❶ نكتب قانون المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \;\; y_1 \quad\; x_2 \;\; y_2 \\ A(-1,-2), B(3,-4) \end{matrix}\right\} M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{-2-4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{-6}{2}\right) \Rightarrow M = (1,-3)$$

❷ نكتب قانون المسافة الذي تعلمناه في النقطة اولاً $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

**H.W:** جد المسافة ونقطة المنتصف بين كل نقطتين

| ❶ $A(0,0), B(3,8)$ | ❷ $A(-3,-1), B(1,-4)$ | ❸ $A(8,1), B(-4,3)$ | ❹ $A(6,-9), B(0,2)$ | ❺ $A(-2,4), B(-6,-2)$ |
|---|---|---|---|---|

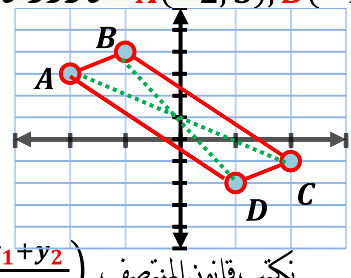



بالعلم والاجتهاد تبني وطنك فكن حريصاً على دراستك

**مثال 9** بين باستعمال قانون المنتصف ان النقط $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ تمثل رؤوس متوازي الاضلاع

"من خواص متوازي الاضلاع هو : ان قطرا احدهما ينصف الاخر" اذن يجب ان نجد منتصف القطر الاول ومنتصف القطر الثاني .
فإذا كان منتصف القطر الاول يساوي منتصف القطر الثاني فان الشكل يمثل متوازي الاضلاع .






نكتب قانون المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

القطر الاول $B(-1,4), D(1,-2)$

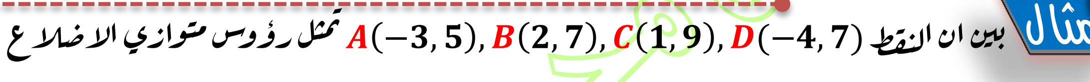
$$M_1 = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right)$$
$$M_1 = \left(\frac{0}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right)$$
$$M_1 = (0,1)$$

القطر الثاني $A(-2,3), C(2,-1)$

$$M_2 = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$$
$$M_2 = \left(\frac{0}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right)$$
$$M_2 = (0,1)$$

$\because M_1 = M_2$

$\therefore$ النقاط $A, B, C, D$ تمثل رؤوس متوازي الاضلاع "حسب خواص متوازي الاضلاع"



**مثال 10** بين ان النقط $A(-3,5), B(2,7), C(1,9), D(-4,7)$ تمثل رؤوس متوازي الاضلاع



❶ باستعمال قانون المسافة بين نقطتين ❷ باستعمال قانون المنتصف

❶ $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

سوف نجد المسافة لكل ضلعين متقابلين في متوازي الاضلاع

$A(-3,5), B(2,7)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (7-5)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(2+3)^2 + (2)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(5)^2 + (2)^2} = \sqrt{29}$$

$C(1,9), D(-4,7)$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-4-1)^2 + (7-9)^2}$$
$$\overline{CD} = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}$$
$$\overline{CD} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$\therefore AB = CD$

$A(-3,5), D(-4,7)$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-4-(-3))^2 + (7-5)^2}$$
$$\overline{AD} = \sqrt{(-4+3)^2 + (2)^2}$$
$$\overline{AD} = \sqrt{(-1)^2 + 4} = \sqrt{5}$$

$B(2,7), C(1,9)$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-2)^2 + (9-7)^2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$\therefore AD = BC$

اذن النقاط $A, B, C, D$ تمثل رؤوس متوازي اضلاع
" كل ضلعين متقابلين متساويين"

❷ $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

القطر الاول $B(2,7), D(-4,7)$

$$M_1 = \left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{7+7}{2}\right)$$
$$M_1 = \left(\frac{2-4}{2}, \frac{14}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{14}{2}\right)$$
$$M_1 = (-1,7)$$

القطر الثاني $A(-3,5), C(1,9)$

$$M_2 = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{5+9}{2}\right)$$
$$M_2 = \left(\frac{-2}{2}, \frac{14}{2}\right)$$
$$M_2 = (-1,7)$$

$\because M_1 = M_2$

$\therefore$ النقاط $A, B, C, D$ تمثل رؤوس متوازي الاضلاع "حسب خواص متوازي الاضلاع"

**H.W:** بين ان النقط $A(4,0), B(6,-6), C(-8,0), D(-10,6)$ تمثل رؤوس متوازي الاضلاع
❶ باستعمال قانون المسافة بين نقطتين ❷ باستعمال قانون المنتصف







اذا كانت $M(1,-3)$ منتصف المستقيم $\overline{AB}$ وكانت $A(-1,-2)$ جد احداثي النقطة $B$ .

SOL:

في هذه السؤال المعلوم هو نقطة المنتصف $M(1,-3)$ والنقطة $A(-1,-2)$ والمطلوب هو احداثي النقطة $B$

نفرض النقطة $B(x_2,y_2)$ و $A(-1,-2)$ و $M(1,-3)$ ثم نعوضها بقانون المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ($x_1$ , $y_1$)

$$(1,-3) = \left(\frac{-1+x_2}{2}, \frac{-2+y_2}{2}\right)$$

بالمقارنة مع الطرفين فيكون المسقط السيني يساوي المسقط السيني و المسقط الصادي يساوي المسقط الصادي

$$1 = \frac{-1+x_2}{2} \xrightarrow{\text{نضرب الطرفين في } 2} \left(1 = \frac{-1+x_2}{2}\right) \times 2$$

$2 \times (1) = -1 + x_2$

$2 + 1 = x_2$

$x_2 = 3$

$$-3 = \frac{-2+y_2}{2} \xrightarrow{\text{نضرب الطرفين في } 2} \left(-3 = \frac{-2+y_2}{2}\right) \times 2$$

$2 \times (-3) = 2 \times \left(\frac{-2+y_2}{2}\right)$

$-6 = -2 + y_2 \Rightarrow -6 + 2 = y_2$

$y_2 = -4$

$\therefore B(3,-4)$

مثال 12

اذا كانت $M(4,-2)$ منتصف المستقيم $\overline{AB}$ وكانت $B(5,1)$ جد احداثي النقطة $A$ .

SOL:

نفرض النقطة $A(x_1,y_1)$ و $B(5,1)$ و $M(4,-2)$ ثم نعوضها بقانون المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ($x_2$ , $y_2$)

$$(4,-2) = \left(\frac{x_1+5}{2}, \frac{y_1+1}{2}\right)$$

المسقط السيني

$$4 = \frac{x_1+5}{2} \xrightarrow{\text{نضرب الطرفين في } 2} \left(4 = \frac{x_1+5}{2}\right) \times 2$$

$8 = x_1 + 5$

$8 - 5 = x_1$

$x_1 = 3$

المسقط الصادي

$$-2 = \frac{y_1+1}{2} \xrightarrow{\text{نضرب الطرفين في } 2} \left(-2 = \frac{y_1+1}{2}\right) \times 2$$

$-4 = y_1 + 1$

$-4 - 1 = y_1$

$y_1 = -5$

$\therefore A(3,-5)$

وللتحقيق: نعوض النقطة بقانون المنتصف $(4,-2) = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-5+1}{2}\right)$

$(4,-2) = (4,-2)$ ✓

H.W: اذا كانت $M(-2,0)$ منتصف المستقيم $\overline{AB}$ وكانت $A(4,0)$ جد احداثي النقطة $B$ .






لتكن $A(4,0), B(6,-6), C(-8,0)$ جد احداثي النقطة $D$ اذا كان الشكل $ABCD$ متوازي الاضلاع.

SOL:

في هذه السؤال المعطى هو ثلاث نقاط والمطلوب النقطة الرابعة $D$ لشكل متوازي الاضلاع . وسوف نحل هذه السؤال بقانون نقطة المنتصف

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

القطر الاول $A(4,0), C(-8,0)$

$$M_1 = \left(\frac{4+(-8)}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

$$M_1 = \left(\frac{4-8}{2}, \frac{0}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{0}{2}\right)$$

$$M_1 = (-2,0)$$

القطر الثاني $B(6,-6), D(x_2, y_2)$

بما انه النقطة $D$ مجهولة والشكل متوازي الاضلاع اذن من خلال خواص متوازي الاضلاع يكون $M_1 = M_2 = (-2,0)$

$$M_2 = (-2,0) = \left(\frac{6+x_2}{2}, \frac{-6+y_2}{2}\right)$$

$$-2 = \frac{6+x_2}{2} \xrightarrow{\text{نضرب الطرفين في } 2} \left(-2 = \frac{6+x_2}{2}\right) \times 2$$

$$-4 = 6 + x_2 \Rightarrow -4 - 6 = x_2$$

$$x_2 = -10$$

$$0 = \frac{-6+y_2}{2} \xrightarrow{\text{نضرب الطرفين في } 2} \left(0 = \frac{-6+y_2}{2}\right) \times 2$$

$$0 = -6 + y_2 \Rightarrow 0 + 6 = y_2$$

$$y_2 = 6$$

$\therefore D(-10,6)$ هي نقطة الرأس الرابع

**H.W:** لتكن $A(1,0), B(5,0), C(7,3)$ جد احداثي النقطة $D$ اذا كان الشكل $ABCD$ متوازي الاضلاع.

**مثال 14**

$A(3,1), B(5,3), C(5,-1)$ رؤوس مثلث حيث $\overline{AB} = \overline{AC}$ و النقطة $M$ منتصف $\overline{BC}$ جد طول $\overline{AM}$.

SOL:

نجد $M$ منتصف $B(5,3), C(5,-1)$ من خلال قانون المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$M = \left(\frac{5+5}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{2}{2}\right) \Rightarrow M = (5,1)$$

الان نجد طول $\overline{AM}$ من خلال النقطتين $A(3,1)$ , $M(5,1)$ باستخدام قانون المسافة $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$$\overline{AM} = \sqrt{(5-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4}$$

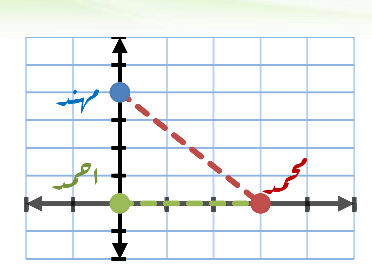
طول الضلع $\overline{AM} = 2$



الصبر مفتاح الفرج




## مسائل حياتية



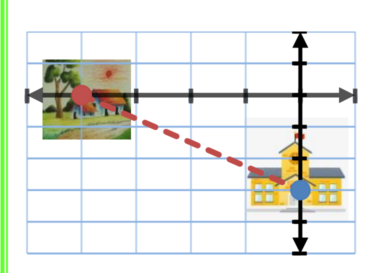

**1 ثلاث اصدقاء** :- ثلاث اصدقاء خرجوا في رحلة استكشافية محددة مواقعهم كما في الشكل المجاور محمد يبعد من احمد $3km$ مهند يبعد من احمد $4km$ كيف تجد المسافة بين محمد و مهند؟

**الجواب**

من خلال الرسم تكون نقطة موقع محمد هي $A(3,0)$ ونقطة موقع مهند هي $B(0,4)$ وباستخدام قانون المسافة نجد المسافة بينهما

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5km$$ اذن المسافة بين محمد ومهند هي



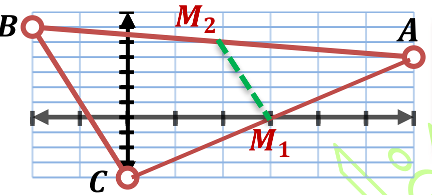
**2 تحديد موقع** :- موقع بيت محمود عند النقطة $(-4,0)$ وموقع مدرسته عند النقطة $(0,-3)$ ما المسافة التي يقطعها محمود عند ذهابه الى المدرسة. علما ان طول كل وحدة في المستوى الاحداثي هي $km$

**الجواب**

نجد المسافة بين البيت $(-4,0)$ والمدرسة $(0,-3)$ باستخدام قانون المسافة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0-(-4))^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5km$$ المسافة الذي يقطعها محمود هي




**3 هندسة** :- مثلث رؤوسه $A(6,4), B(-2,6), C(0,-4)$ تحقق من ان طول القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه تساوي نصف طول الضلع الثالث

**الجواب**

نجد نقطة منتصف $A(6,4)$ و $C(0,-4)$ من خلال قانون المنتصف $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$M_1 = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{4-4}{2}\right) = (3,0)$$

نجد نقطة منتصف $A(6,4)$ و $B(-2,6)$

$$M_2 = \left(\frac{6+(-2)}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{6-2}{2}, \frac{10}{2}\right) = (2,5)$$

الآن نجد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين $M_1(3,0)$ و $M_2(2,5)$ من خلال قانون المسافة $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{(2-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

الان نجد طول الضلع الثالث $\overline{CB}$ الواصل بين النقطتين $C(0,-4)$, $B(-2,6)$

$$\overline{CB} = \sqrt{(-2-0)^2 + (6-(-4))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (6+4)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

نعم طول القطعة $\overline{M_1M_2}$ نصف طول القطعة $\overline{CB}$







**أولاً تحدٍ** دائرة طرفا احد اقطارها النقطتان $A(-1,1), B(5,1)$ جد ❶ احداثيات مركزها ❷ مساحتها

**SOL:**

❶ احداثيات مركزها هو نقطة منصف القطر $\overline{AB}$ الواصل بين النقطتين $A(-1,1), B(5,1)$ ونجده من خلال القانون

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{-1+5}{2},\frac{1+1}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{2}{2}\right)=(2,1)$$

تمثل احداثي مركز الدائرة

❷ مساحة الدائرة $=r^2\pi$ ولكن $r$ مجهول ولإيجاده نستخدم قانون المسافة بين النقطتين $A(-1,1), B(5,1)$

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-(-1))^2+(1-1)^2}=\sqrt{(5+1)^2+(0)^2}=\sqrt{36}=6$$

مسافة $\overline{AB}=6$ وهو قطر الدائرة فيكون نصف القطر هو $r=3$

مساحة الدائرة $=(3)^2\pi=9\pi$

---

**ثانياً أكتشف الخطأ** وجدت شهد احداثيات نقطة منصف القطعة المستقيمة التي طرفيها النقطتين $(6,1),(8,3)$ فكتبتها

$\left(\frac{8-6}{2},\frac{3-1}{2}\right)=(1,1)$ اكتشف خطأ شهد و صححه

**SOL:**

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{8+6}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(7,2)$$ ✓

✗ خطأ شهد هو في كتابة قانون نقطة المنصف حيث كتبة عملية الطرح بدل عملية الجمع

---

**ثالثاً اكتب** علاقة قانون نقطة المنصف بإيجاد الوسط الحسابي

**SOL:**

الوسط الحسابي هو مجموع القيم على عددها وقانون المنصف هو مجموع قيم السينات على عددها و مجموع قيم الصادات على عددها

## الدرس [5-4] المسافة بين نقطتين

## Distance between two Points

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 المسافة بين نقطتين: $(0,3),(2,-5)$ تساوي:

a) $-2\sqrt{17}$ b) $\sqrt{10}$ c) $17\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{17}$ ✓

2 نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(3,-1),(7,-3)$ :

a) $(5,2)$ b) $(-2,5)$ c) $(5,-2)$ ✓ d) $(-5,-2)$

3 اذا كانت نقطة منتصف قطعة مستقيم $\overline{AB}$ هي $(2,1)$ حيث $A(a,b),B(3,2)$ فأن قيمة b,a هي:

a) $a=1, b=1$ b) $a=1, b=-1$ c) $a=-1, b=0$ d) $a=1, b=0$ ✓

4 قانون المسافة بين النقطتين $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ هو:

a) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$ b) $\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$

c) $\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$ d) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ✓

5 قانون نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين $(x_2,y_2),(x_1,x_2)$ هو:

a) $(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2})$ b) $(\frac{x_1+x_2}{3},\frac{y_1+y_2}{3})$

c) $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ ✓ d) $(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{x_1+x_2}{2})$

6 النقطة $(2,-2)$ هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين:

a) $(-8,-1),(4,-3)$ b) $(8,1),(1,-3)$

c) $(8,1),(4,-3)$ d) $(8,-1),(-4,-3)$ ✓

7 باستعمال قانون المسافة: المثلث الذي رؤوسه $A(3,-1),B(-3,3),C(-3,-1)$ :

a) متساوي الساقين b) متساوي الاضلاع

c) مختلف الاضلاع حاد الزوايا d) مختلف الاضلاع قائم الزاوية ✓




الدرس (6 -4)

# النسب المثلثية

دراستنا في هذه الدرس على المثلث القائم الزاوية. سنتعرف على بعض المفاهيم الخاصة به

فية الزاوية $\measuredangle B$ قائمة وقياسها $90°$ والزاويتان $\measuredangle A, \measuredangle C$ زاويتان حادتان مجموعهما $90°$

فيه الضلع $\overline{AC}$ يمثل الوتر حيث هو دائما يقابل الزاوية القائمة و الضلع $\overline{AB}$ يمثل الضلع القائم

والضلع $\overline{BC}$ يمثل القاعدة \\ وهناك علاقة تربط بين اضلاع المثلث وهي "علاقة فيثاغورس"

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ تستخدم لإيجاد احد الاضلاع المجهولة في المثلث القائم الزاوية

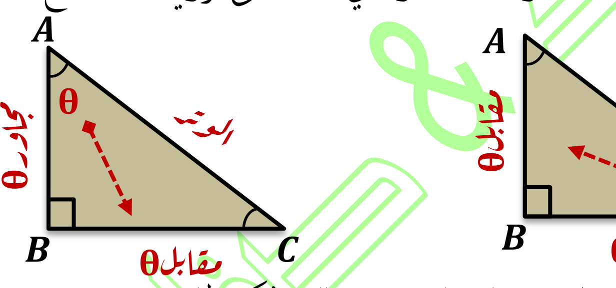
المفاهيم أعلاه والعلاقات خاصة فقط بالمثلث قائم الزاوية ولا يمكن ان تطبق على أي مثلث غير قائم الزاوية

A, B, C, $90°$, الوتر, الضلع القائم, القاعدة

## اولاً النسب المثلثية : هي النسبة الذي تقارن بين طولي ضلعين من اضلاع المثلث القائم الزاوية.

هناك ثلاث نسب مثلثية اساسية للمثلث القائم الزاوية $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و $\tan\theta$ والذي تعتمد على الزوايا الحاده $\theta$ مع علاقتها بالاضلاع

هناك موقعين للزاوية الحادة $\theta$ في الاعلى و الاسفل




يتم تعين مقابل الزاوية $\theta$ حسب الضلع الذي يقابلها ومجاور الزاوية $\theta$ حسب الضلع الذي يجاورها حيث الوتر ثابت في كلا الحالتين من موقع الزاوية.

1. جيب $\theta$ : ونرمز له بالرمز $\sin\theta$ ويقرأ (ساين الثيتا) وهو النسبة بين الضلع المقابل للزاوية و الوتر ويعطى بالعلاقة

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}\,\theta}{\text{الوتر}}$$

2. جيب تمام $\theta$ : ونرمز له بالرمز $\cos\theta$ ويقرأ (كوساين الثيتا) وهو النسبة بين الضلع المجاور للزاوية و الوتر ويعطى بالعلاقة

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}\,\theta}{\text{الوتر}}$$

3. ظل $\theta$ : ونرمز له بالرمز $\tan\theta$ ويقرأ (تان الثيتا) وهو النسبة بين الضلع المقابل للزاوية و الضلع المجاور ويعطى بالعلاقة

$$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}\,\theta}{\text{مجاور}\,\theta}$$

سوف نتعلم كيف نجد النسب المثلية في الامثلة التالية




**مثال 1**

من الشكل المجاور . جد قيم النسب المثلثية الثلاثة $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و $\tan\theta$

(مثلث قائم في B: $AC = 5cm$ ، $BC = 4cm$ ، $AB = 3$ ، الزاوية $\theta$ عند C)

**SOL:**

نستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد الضلع المجهول $\overline{AB}$

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ نعوض اطوال الاضلاع المعلومة من المثلث

$(5)^2 = (4)^2 + (AB)^2$

$25 = 16 + (AB)^2$

$25 - 16 = (AB)^2 \Rightarrow 9 = (AB)^2$

$\sqrt{9} = \sqrt{(AB)^2}$ بجذر الطرفين التربيعي

$AB = 3$ نعوض قيمة الضلع في المثلث

$\sin\theta = \frac{\theta \text{ مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{\theta \text{ مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{\theta \text{ مقابل}}{\theta \text{ مجاور}} = \frac{3}{4}$

**مثال 2**

في المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $B$ فيه $AB = 3cm$ و $AC = 6cm$ جد $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan C$

**SOL:** نرسم المثلث ثم نحدد الحرف $B$ على الزاوية القائمة وبعد ذلك نحدد الزوايا $\measuredangle A, \measuredangle B$. ثم نحدد اطوال الاضلاع المعطاة من السؤال

(مثلث: $AB = 3cm$ ، $AC = 6cm$ ، $BC = 5cm$)

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

$(6)^2 = (BC)^2 + (3)^2$

$36 = (BC)^2 + 9$

$36 - 9 = (BC)^2$

$25 = (BC)^2$

$BC = 5$

$\sin A = \frac{A \text{ مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{6}$

$\cos A = \frac{A \text{ مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\tan C = \frac{C \text{ مقابل}}{C \text{ مجاور}} = \frac{5}{3}$



**H.W:** في المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $B$ فيه $AB = 8cm$ و $BC = 15cm$ جد $\sin C$ و $\cos C$ و $\tan A$

**مثال 3**

في المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $B$ اذا كان $\tan A = \frac{15}{8}$ جد $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan C$

**SOL:** نرسم المثلث ثم نحدد الحرف $B$ على الزاوية القائمة

من خلال المعطيات $\tan A = \frac{15}{8} = \frac{A \text{ مقابل}}{A \text{ مجاور}}$

نحدد مقابل و مجاور $A$

(مثلث: $AB = 8$ ، $BC = 15$ ، $AC = 17$)

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

$(AC)^2 = (15)^2 + (8)^2$

$(AC)^2 = 225 + 64$

$(AC)^2 = 289$

$AC = 17$

$\sin A = \frac{A \text{ مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$

$\cos A = \frac{A \text{ مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$

$\tan C = \frac{C \text{ مقابل}}{C \text{ مجاور}} = \frac{8}{15}$

**H.W:** في المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $B$ اذا كان $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ جد $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan C$



**مثال 4** في المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $B$ اذا كان $sinA = \frac{1}{\sqrt{2}}$ جد $sinA$ ، $cosC$ ، $tanA$

**SOL:** نرسم المثلث ثم نحدد الحرف $B$ على الزاوية القائمة

من خلال المعطيات $sinA = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{مقابل A}{الوتر}$

نحدد مقابل A والوتر

$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$
$$(\sqrt{2})^2 = (1)^2 + (AB)^2$$
$$2 = 1 + (AB)^2$$
$$2 - 1 = (AB)^2$$
$$(AB)^2 = 1$$
$$AB = 1$$

$$cosA = \frac{مجاور A}{الوتر} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$cosC = \frac{مجاور C}{الوتر} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$tanA = \frac{مقابل A}{مجاور A} = \frac{1}{1} = 1$$

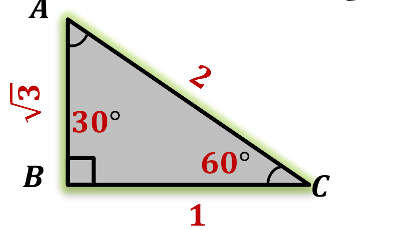
## ثانياً النسب المثلثية للزوايا الخاصة : الزوايا الخاصة في هذه المرحلة هي $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$



والجدول المجاور يبين قيم النسب المثلثية لهذه الزوايا . حفظ

ويمكن حفظ الزاويتين $30°$ و $60°$ المتعاكستين من خلال المثلث ادناه

| النسب \ الزوايا | 30° | 60° | 45° | 90° | 0° |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 | 0 |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0 | 1 |
| tan | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | 1 | غير معرف | 0 |






**مثال 5** من الشكل المجاور جد قيمة $x, y$

ملاحظة: عندما يكون في المثلث ضلعين مجهولات وزاوية خاصة معلومة لا يمكن ان نستخدم نظرية فيثاغورس بل نستخدم النسب المثلثية للزوايا الخاصة

**SOL:** في البداية نحدد القيمة المجهولة الذي نريد ان نجدها
نجد $x$ اولاً : تسأل نفسك ما هي علاقة $x$ بالنسبة للزاوية $30°$ ؟ نعم: $x$ هي الوتر للزاوية .
ثم تسأل نفسك ؟ ما هي علاقة الضلع المعلوم $2\sqrt{3}$ بالنسبة للزاوية نعم: مجاور. ما هي النسبة المثلثية التي تربط الوتر والمجاور هي
$cos30°$
وبنفس الطريقة للقيمة $y$: الذي تكون نسبتها
$tan30°$

$$cos30° = \frac{مجاور 30°}{الوتر} = \frac{2\sqrt{3}}{x}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{x}$$
$$\sqrt{3}x = 2(2\sqrt{3})$$
$$\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$
$$x = 2(2)$$
$$x = 4$$

نعوض قيمة $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ من الجدول ثم نضرب الطرفين في الوسطين ثم نقسم على $\sqrt{3}$ للتخلص من معامل المتغير

$$tan30° = \frac{مقابل 30°}{مجاور 30°} = \frac{y}{2\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{2\sqrt{3}}$$
$$\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$y = 2$$




وقف رجل امام بناية على بعد $12m$ من قاعدتها ونظر الى قمة البناية بزاوية مقدارها $30°$ جد ارتفاع البناية؟

**SOL:** نرسم مثلث قائم الزاوية ونحدد علية المعطيات ونفرض ارتفاع العمارة أي رمز وليكن $h$ الذي يمثل المقابل بالنسبة للزاوية والمجاور الذي يمثل $12m$ فتكون النسبة الذي تربط بين المقابل والمجاور هي $\tan 30° = \frac{\text{مقابل}30°}{\text{مجاور}30°}$

(مثلث: $30°$ ، $12$ ، $h$)

نعوض قيمة $\tan 30°$ من الجدول ثم نضرب الطرفين في الوسطين ثم نقسم على $\sqrt{3}$ للتخلص من معامل المتغير ثم نضرب بسط ومقام بجذر $\sqrt{3}$ ليصبح العدد نسبي

$$\tan 30° = \frac{\text{مقابل}30°}{\text{مجاور}30°} = \frac{h}{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{12} \Rightarrow \sqrt{3}h = 12$$

$$\frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{12^{4}\sqrt{3}}{3}$$

$h = 4\sqrt{3}$ ارتفاع البناية



طائرة ورقية ارتفاعها $3\sqrt{3}m$ عن سطح الارض . اذا كان الخيط المتصل بها يصنع زاوية مقدارها $60°$ مع الارض . جد طول الخيط؟

**SOL:** نرسم مثلث قائم الزاوية ونحدد علية المعطيات ونفرض طول الخيط أي رمز وليكن $L$ الذي يمثل الوتر بالنسبة للزاوية والمقابل الذي يمثل $3\sqrt{3}m$ فتكون النسبة الذي تربط بين الوتر المقابل هي $\sin 60° = \frac{\text{مقابل}60°}{\text{الوتر}}$

(مثلث: $60°$ ، $L$ ، $3\sqrt{3}m$)

$$\sin 60° = \frac{\text{مقابل}60°}{\text{الوتر}} = \frac{3\sqrt{3}}{L}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{L} \Rightarrow \sqrt{3}L = 2(3\sqrt{3})$$

$$\frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{3}} = \frac{2(3\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

$L = 2(3) \Rightarrow L = 6$ طول الخيط

**H.W** : اذا كان شخص ينظر الى قمة عمارة امامة ارتفاعها $6\sqrt{3}\ m$ بزاوية $60°$ مع الارض . جد بعد الشخص عن قاعدة العمارة

ANS=6




## علاقات النسب المثلثية:

سنقتصر في هذه البند على مقلوب النسب المثلثية الاساسية

سوف نتعرف على مقلوب كل نسبة مثلثية لتكون لنا علاقات جديده.

1. مقلوب $\sin\theta$: هو $Csc\theta$ ويقرأ ( كوسيكن الثيتا ) ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}\theta}$$

2. مقلوب $\cos\theta$: هو $Sec\theta$ ويقرأ ( سيكن الثيتا ) ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}\theta}$$

3. مقلوب $\tan\theta$: هو $Cot\theta$ ويقرأ ( كوتان الثيتا ) ويعطى بالعلاقة التالية:

$$Cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\text{المجاور}\theta}{\text{المقابل}\theta}$$

علاقات النسب المثلثية $Csc\theta$ , $Sec\theta$ , $Cot\theta$ تأخذ مقلوب قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة. أي مقلوب الجدول الذي تعرفنا علية سابقاً

المقلوب: هو ان نجعل البسط مقام والمقام بسط







من الشكل المجاور . جد قيم النسب المثلثية $sinA$ و $cosC$ و $cotC$ و $secA$

(مثلث قائم في B: $AB = 4$ ، $BC = 3$ ، $AC = 5$)

SOL:

نستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد الضلع المجهول $\overline{AC}$

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

$(AC)^2 = (3)^2 + (4)^2$

$(AC)^2 = 9 + 16$

$(AC)^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$

$sinA = \frac{\text{مقابل}A}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$

$cosC = \frac{\text{مجاور}C}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$

$cotC = \frac{\text{مجاور}C}{\text{مقابل}C} = \frac{3}{4}$

$secA = \frac{\text{الوتر}}{\text{مجاور}A} = \frac{5}{4}$




المثلث $ABC$ قائم الزاوية في $B$ اذا كان $cosA = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ جد $cscA$ و $cotA$ و $secA$

SOL: نرسم المثلث ثم نحدد الحرف $B$ على الزاوية القائمة

من خلال المعطيات $cosA = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{\text{مجاور}A}{\text{الوتر}}$

نحدد مجاور A والوتر

(مثلث: $AB = \sqrt{3}$ ، $AC = \sqrt{11}$ ، $BC = \sqrt{8}$)

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

$(\sqrt{11})^2 = (BC)^2 + (\sqrt{3})^2$

$11 = (BC)^2 + 3$

$11 - 3 = (BC)^2$

$8 = (BC)^2$

$BC = \sqrt{8}$

$cscA = \frac{\text{الوتر}}{\text{مقابل}A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{8}}$

$cotA = \frac{\text{مجاور}A}{\text{مقابل}A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

$secA = \frac{\text{الوتر}}{\text{مجاور}A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$

مثال 10

المثلث $ABC$ قائم الزاوية في $B$ اذا كان $cotA = \sqrt{3}$ جد $cscA$ و $secA$ و $cosA$ و $sinA$ و $tanA$

SOL: نرسم المثلث ثم نحدد الحرف $B$ على الزاوية القائمة

من خلال المعطيات $cotA = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\text{مجاور}A}{\text{مقابل}A}$

نحدد المجاور والمقابل A

(مثلث: $AB = \sqrt{3}$ ، $BC = 1$ ، $AC = 2$)

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$

$(AC)^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2$

$(AC)^2 = 1 + 3$

$(AC)^2 = 4$

$AC = 2$

$cscA = \frac{\text{الوتر}}{\text{مقابل}A} = \frac{2}{1}$

$secA = \frac{\text{الوتر}}{\text{مجاور}A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$cosA = \frac{\text{مجاور}A}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sinA = \frac{\text{مقابل}A}{\text{الوتر}} = \frac{1}{2}$

$tanA = \frac{\text{مقابل}A}{\text{مجاور}A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**H.W** ❶: من الشكل المجاور جد النسب المثلثية $cscA$ و $cotA$ و $secC$ و $cotC$

(مثلث قائم في B: $BC = 12$ ، $AC = 13$)

**H.W** ❷: المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $B$ اذا كان $secA = \sqrt{2}$ جد $sinA$ و $cosC$ و $cscA$ و $cotC$

**H.W** ❸: المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $B$ اذا كان $tanC = 1$ جد $sinC$ و $cosA$ و $cscC$ و $cotC$

**H.W** ❹: المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $B$ اذا كان $sinA = \frac{1}{2}$ جد $secA$ و $cosA$ و $tanA$ و $cotC$







جد القيمة العددية للمقادير التالية.\\ ملاحظة: عندما يكون السؤال هو جد القيمة فالمقصود هو تعويض قيم النسب المثلثية من خلال الجدول الخاص بالزوايا

❶ $(\sin 45°)(\sec 45°)-(\tan 60°)(\cot 30°)+2\csc 90°$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)-(\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)+2(1)$

$=1-3+2 \Rightarrow 3-3$

$=0$

$\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

$\csc 90° = \frac{1}{\sin 90°} = \frac{1}{1}$

$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

❷ $(\tan 60°)^2+(\cot 45°)^2+(\sec 30°)^2+(\sin 45°)^2$

$=(\sqrt{3})^2+(1)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$=3+1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{1}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}$

$=\frac{24+8+3}{6}=\frac{35}{6}$

ملاحظة: التربيع ينزل على البسط والمقام

$\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = \frac{1}{1} = 1$

$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

نجد النسب التالية من مقلوبات النسب الاساسية من خلال قيم الجدول الخاص ثم نعوضها لإيجاد ناتج المقدار

H.W : جد القيمة العددية للمقدار التالي $(\tan 45°)(\sin 60°)+(\sin 30°)^2$

$ANS=\frac{2\sqrt{3}+1}{4}$




اثبت ان: \\ ملاحظة: عندما يكون السؤال هو اثبت أن فالمقصود اثبات الطرف الاول يساوي الطرف الثاني من خلال تعويض قيم النسب المثلثية من الجدول الخاص

❶ $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = \sin 90°$

SOL:

$ط_1 = \sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30°$

$ط_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$ط_1 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} \Rightarrow ط_1 = \frac{3+1}{4}$

$ط_1 = \frac{4}{4} \Rightarrow ط_1 = 1$

$ط_2 = \sin 90°$

$ط_2 = 1$

$ط_1 = ط_2$ وهو المطلوب

الطرف الاول ينتهي لغاية المساواة والطرف الثاني يبدء من المساواة ثم نعوض بها قيم النسب من الجدول

❷ $(\cos 60°)^2-(\sin 60°)^2=-\frac{1}{2}$

SOL:

$ط_1 = (\cos 60°)^2-(\sin 60°)^2$

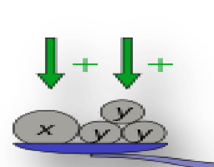
$ط_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

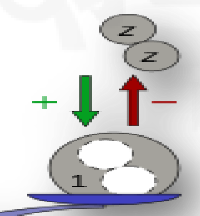
$ط_1 = \frac{1}{4}-\frac{3}{4} \Rightarrow ط_1 = \frac{1-3}{4}$

$ط_1 = \frac{-2^{-1}}{4_2} \Rightarrow ط_1 = -\frac{1}{2}$

$ط_2 = -\frac{1}{2}$

$ط_1 = ط_2$ وهو المطلوب



$x+3y=1-2z$

❸ $(\cos45° - \csc45°)(\tan45°)(\csc90°) = -\cos45°$

SOL:

$ط_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{1}\right)(1)(1)$

$ط_1 = \left(\frac{1-\sqrt{2}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)(1)$

$ط_1 = \frac{1-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow ط_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$ط_2 = -\cos45°$

$ط_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow ط_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$ط_1 = ط_2$ وهو المطلوب

❹ $\frac{\cot45° + \sin90°}{2\sec30°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

SOL:

$ط_1 = \frac{1+1}{2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow ط_1 = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{3}}}$

$ط_1 = \frac{2}{1} \times \frac{\sqrt{3}}{4_2}$

ملاحظة: نحول القسمة الى ضرب ثم نقلب الكسر الثاني

$ط_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ط_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ط_1 = ط_2$ وهو المطلوب

❺ $\sqrt{\frac{1-\cos60°}{2}} = \sin30°$

SOL:

$ط_1 = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} \Rightarrow ط_1 = \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}}{2}}$

$ط_1 = \sqrt{\frac{\frac{2-1}{2}}{2}} \Rightarrow ط_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} \Rightarrow ط_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$

$ط_1 = \sqrt{\frac{1}{4}}$ بالجذر التربيعي $\Rightarrow ط_1 = \frac{1}{2}$

$ط_2 = \sin30°$

$ط_2 = \frac{1}{2}$

$ط_1 = ط_2$ وهو المطلوب

❻ $(\cos30° - \csc45°)(\sin60° + \sec45°) = -\frac{5}{4}$

SOL:

$ط_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{1}\right)$

$ط_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2$

$ط_1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{1}$

$ط_1 = \frac{3-8}{4}$

$ط_1 = \frac{-5}{4}$

$ط_2 = -\frac{5}{4}$

$ط_1 = ط_2$ وهو المطلوب

**H.W : اثبت أن :**

❶ $2\sin30°\sec30° = \csc60°$

❷ $(\csc30°)^2 + (\cot30°)^2 = 7$

❸ $2\sin45°\cos45° = \sin90°$

❹ $\cos60°\csc60° + \sin60°\sec60° = \frac{4}{\sqrt{3}}$

❺ $\sin45°\sec45° + \csc45°\sin45 = 2$



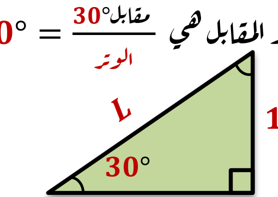






**1 رياضة :** - عمل جهاز رياضي مائل لتمرين السير بزاوية قدرها $30°$ فاذا كان طرف الجهاز يرتفع $1.5m$ عن سطح الارض. فما طول حزام الجهاز؟

**SOL:** نرسم مثلث قائم الزاوية ونحدد علية المعطيات ونفرض طول الحزام أي رمز وليكن $L$ الذي يمثل الوتر بالنسبة للزاوية والمقابل الذي يمثل $1.5m$ فتكون النسبة الذي تربط بين الوتر و المقابل هي $\sin 30° = \frac{\text{مقابل }30°}{\text{الوتر}}$




$$\sin 30° = \frac{\text{مقابل }30°}{\text{الوتر}} = \frac{1.5}{L}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{L}$$

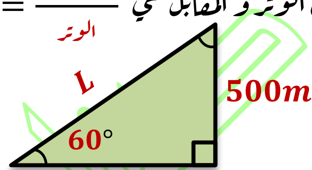
$$L = 2(1.5)$$

$$L = 3m$$ طول حزام الجهاز



**2 تزلج على الجليد :** - في موقع للتزلج على احد التلال كان ارتفاع التلة الرئيسية $500m$ وزاوية ميلها عن مستوى الارض $60°$. ما طول سطح التزلج ؟

**SOL:** نرسم مثلث قائم الزاوية ونحدد علية المعطيات ونفرض طول السطح أي رمز وليكن $L$ الذي يمثل الوتر بالنسبة للزاوية والمقابل الذي يمثل $500m$ فتكون النسبة الذي تربط بين الوتر و المقابل هي $\sin 60° = \frac{\text{مقابل }60°}{\text{الوتر}}$




$$\sin 60° = \frac{\text{مقابل }60°}{\text{الوتر}} = \frac{500}{L}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{500}{L} \Rightarrow \sqrt{3}L = 2(500)$$

$$\sqrt{3}L = 1000 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{3}} = \frac{1000}{\sqrt{3}}$$

$$L = \frac{1000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow L = \frac{1000\sqrt{3}}{3}m$$ طول سطح التزلج

**3 سلم اطفاء الحرائق :** - سلم اطفاء طولة $20m$ يرتكز احد طرفيه على بناية والاخر على ارض افقية بزاوية $45°$. جد ارتفاع نقطة ارتكاز طرف السلم على البناية(ارتفاع البناية) ؟

**SOL:** نرسم مثلث قائم الزاوية ونحدد علية المعطيات ونفرض ارتفاع البناية أي رمز وليكن $h$ الذي يمثل المقابل بالنسبة للزاوية والوتر الذي يمثل $20m$ طول السلم فتكون النسبة الذي تربط بين الوتر و المقابل هي $\sin 45° = \frac{\text{مقابل }45°}{\text{الوتر}}$

20m
h
45°

$$\sin 45° = \frac{\text{مقابل }45°}{\text{الوتر}} = \frac{h}{20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{20} \Rightarrow \sqrt{2}h = 20$$

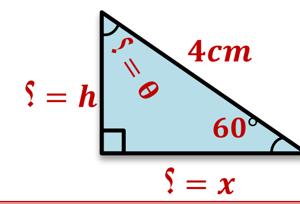
$$h = \frac{20}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{(2)(10)}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{(\sqrt{2}\times\sqrt{2})(10)}{\sqrt{2}}$$

$$h = 10\sqrt{2}m$$ ارتفاع البناية

**④ حديقة : -** وقفت بنان على بعد $25m$ من قاعدة شجرة ارتفاعها $25m$ فما قياس الزاوية التي تشكلها مع قمة الشجرة؟

**SOL:** نرسم مثلث قائم الزاوية ونحدد علية المعطيات ونفرض الزاوية أي رمز وليكن $x$ ثم نحدد المقابل $25m$ الذي يمثل طول الشجرة و المجاور $25m$ الذي يمثل بعد الشجرة فتكون النسبة الذي تربط بين المجاور و المقابل هي

$$\tan x^\circ = \frac{x^\circ \text{مقابل}}{x^\circ \text{مجاور}}$$




$$\tan x^\circ = \frac{x^\circ \text{مقابل}}{x^\circ \text{مجاور}} = \frac{25}{25}$$

$$\tan x^\circ = \frac{25}{25}$$

$$\tan x^\circ = 1$$

$$\therefore x^\circ = 45^\circ$$

هنا العملية عكسية: تسأل نفسك أي زاوية من الجدول $\tan$ لها يساوي $1$ \\ نعم $45^\circ$

## فكر

**أولاً تحدٍ** من الشكل المجاور جد القيم المؤشرة (؟) باستعمال النسب المثلثية



**SOL:**

نجد الزاوية $\theta$ لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ و المقابل وجدناه $2$ فتكون النسبة المثلثية

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{2}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{4} \xrightarrow{\text{نختصر}} \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

نجد مجاور الزاوية $60^\circ$ لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ فتكون النسبة المثلثية

$$\cos 60^\circ = \frac{60^\circ \text{مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Longrightarrow [2x = 4] \div 2$$

$$x = 2$$

نجد مقابل الزاوية $60^\circ$ لان الوتر معلوم يساوي $4cm$ فتكون النسبة المثلثية

$$\sin 60^\circ = \frac{60^\circ \text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{h}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Longrightarrow [2h = 4\sqrt{3}] \div 2$$

$$h = 2\sqrt{3}$$

**ثانياً مسألة مفتوحة** المثلث $ABC$ قائم الزاوية في $B$ اذا كان $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ كيف تجد قيمة الزاوية $C$

**الطريقة الثانية**

من خلال المعطيات $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ من الجدول الخاص يكون قياس الزاوية $A = 60^\circ$ ومن خلال مجموع زوايا المثلث تساوي $180^\circ$ \\ $180^\circ = A + B + C$

$$180^\circ = 60^\circ + 90^\circ + C \Rightarrow 180^\circ = 150^\circ + C$$

$$C = 180^\circ - 150^\circ \Rightarrow C = 30^\circ$$

**الطريقة الاولى**

من خلال معطيات المثلث مجاور $C$ يساوي $\sqrt{3}$ و الوتر يساوي $2$ فيكون النسبة

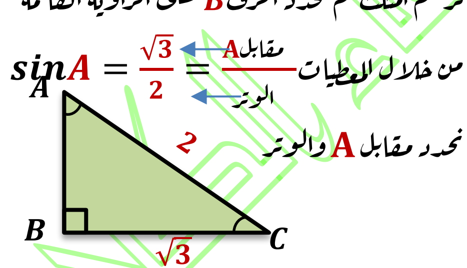
$$\cos C = \frac{C \text{مجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore C = 30^\circ$$

نرسم المثلث ثم نحدد الحرف $B$ على الزاوية القائمة

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A \text{مقابل}}{\text{الوتر}}$$

من خلال المعطيات نحدد مقابل $A$ والوتر




**ثالثاً تبرير** اذا كان جيب زاوية وجيب تمام الزاوية متساويين في مثلث قائم الزاوية مانوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه؟

**SOL:**

$$\sin = \cos \Rightarrow \frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{مجاور}}{\text{الوتر}}$$

هذه يدل على انه المقابل يساوي المجاور ازن الضلعين متساويين فيكون المثلث نوعه متساوي الساقين

**رابعاً اكتب** مسألة تستعمل فيها نسبة الجيب لايجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية . ثم حلها

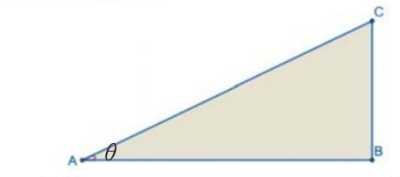
سبق وتطرقنا الى هذه المسائل في سياق شرح الدرس \\ راجع مثال 6




**Multiple Choice** | **الاختيار من متعدد**

## الدرس [4-6] النسب المثلثية

**Triangles**




### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

**1** من الشكل المجاور النسبة المثلثية $\sin\theta$ تكتب:

a) $\frac{AB}{AC}$    b) $\frac{BC}{AB}$     c) $\frac{BC}{AC}$    d) $\frac{AB}{AC}$

**2** ABC مثلث قائم الزاوية في B، اذا كانت $\cos A = \frac{3}{5}$ فأن tanC يساوي:

a) $\frac{4}{5}$    b) $\frac{5}{4}$    c) $\frac{4}{3}$    d) $\frac{3}{4}$

**3** اذا كانت $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ فأن قيمة الزاوية $\theta$ يساوي:

a) 45°    b) 60°    c) 90°    d) 30°

**4** القيمة العددية للمقدار: $\sin 30° \cos 30°$ تساوي:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$    b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$    c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$    d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

**5** مقلوب النسبة $\cos\theta$ هي:

a) $\sin\theta$    b) $\sec\theta$    c) $\csc\theta$    d) $\cot\theta$

**6** القيمة العددية للمقدار $(\sec 60°)^2 - (\tan 60°)^2$ تساوي:

a) -1    b) 0    c) 2    d) 1

**7** ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل المجاور:

القيمة العددية للمقدار $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$ يساوي:

a) -1    b) 0    c) 2    d) 1

**8** اذا كانت $\csc\theta = 2$ فأن قيمة الزاوية $\theta$ هي:

a) 45°    b) 60°    c) 90°    d) 30°

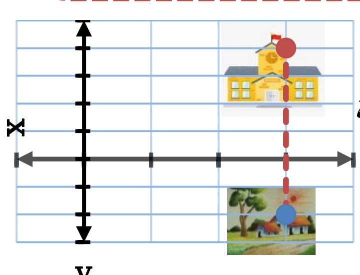



## الدرس (7-4) خطة حل المسألة (تحديد معقولية الاجابة)

في هذه الدرس نستخدم اربع خطوات للحل وهي أفهم، خطط، حل، تحقق

**مثال** حل المسائل التالية باستراتيجية (تحديد معقولية الاجابة)

❶ **موقع البيت و المدرسة:** اذا كانت النقطة $A(3,-2)$ تمثل موقع بيت محمد على المستوى الاحداثي والنقطة $B(3,4)$ تمثل موقع المدرسة. قطع محمد ثلث المسافة بين البيت والمدرسة. اتمثل المسافة $1.2km$ تقديراً معقولاً ام المسافة $1.9km$؟ اذا كان طول المستوى الاحداثي يساوي $1km$






**إفهم** ما معطيات المسألة؟ النقطة $A(3,-2)$ تمثل موقع بيت محمد على المستوى الاحداثي والنقطة $B(3,4)$ تمثل موقع المدرسة. قطع محمد ثلث المسافة بين البيت والمدرسة

ما المطلوب من المسألة؟ المسافة المعقولة التي قطعها محمد هي $1.2km$ ام $1.9km$



**خطط** كيف تحل المسألة؟ جد المسافة بين البيت والمدرسة. محمد قطع ثلث المسافة. فيمكن تقسيم المسافة الى ثلاث مسافات متساوية

**حلّ** نجد المسافة بين البيت $A(3,-2)$ والمدرسة $B(3,4)$ باستخدام قانون المسافة ($x_1$ $y_1$ ، $x_2$ $y_2$)

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$AB=\sqrt{(3-3)^2+(4-(-2))^2}$$

$$AB=\sqrt{(0)^2+(4+2)^2}$$

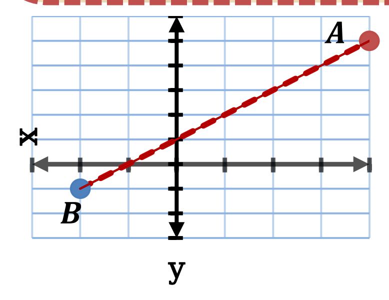
$$AB=\sqrt{36}=6km$$

فتكون ثلث المسافة هي $2km=\frac{6km}{3}$ اذن هي اقرب الى $1.9km$



**تحقق** التقدير هو اقرب الى $1.9km$ لأنه عندما نضربه ب $3$ ينتج $1.9\times 3 = 5.7$ و هو اقرب الى المسافة الكلية التي تساوي $6km$

❷ تحدي جمانة وسالي: قالت جمانة ان $\frac{1}{3}$ المسافة بين النقطتين $A, B$ كما في الشكل المجاور تساوي تقريباً $3cm$ وقالت اختها سالي ان $\frac{1}{2}$ المسافة بين النقطتين نفسيهما تساوي تقريباً $2cm$ ايهما اجابتها معقولة.







ما معطيات المسألة؟ قالت جمانة ان $\frac{1}{3}$ المسافة بين النقطتين $A, B$ هي $3cm$ وقالت اختها سالي ان $\frac{1}{2}$ المسافة هي $2cm$

ما المطلوب من المسألة؟ هل اجابة جمانة ام سالي صحيحة




كيف تحل المسألة؟ نجد المسافة بين النقطتين ثم نجد $\frac{1}{3}$ المسافة و $\frac{1}{2}$ ثم نحدد ايهما صحيح




نجد المسافة بين $A(4,5)$ و $B(-2,-1)$ باستخدام قانون المسافة

$x_1 \quad y_1 \qquad x_2 \quad y_2$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$
$$AB = \sqrt{36+36}$$
$$AB = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}cm$$

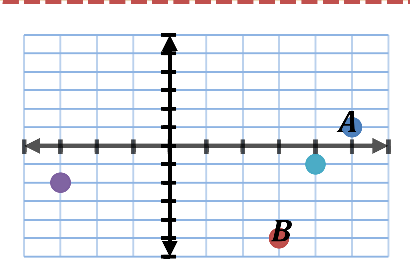
فيكون $\frac{1}{3}$ المسافة هو $2.8 \approx 2(1.4) \approx 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$

ويكون $\frac{1}{2}$ المسافة هو $4.2 \approx 3(1.4) \approx 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$

اذن تقدير جمانة هو صحيح لأنها قالت $\frac{1}{3}$ المسافة $3cm$ وهو قريب على $2.8$




التقدير هو اقرب الى $3cm$ لأنه $\frac{1}{3}$ المسافة هو $2.8$ اذن اجابة جمانة هي صحيحة




❸ سؤال تنافسي: هل احداثيات النقطة $(-3,-2)$ اقرب الى نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $A(5,1)$ و $B(3,-5)$ ام النقطة $(4,-1)$

إفهم

ما معطيات المسألة؟ النقطتين $A(5,1)$ $B(3,-5)$ تمثل قطعة مستقيم

ما المطلوب من المسألة؟ هل نقطة منتصف القطعة المستقيمة اقرب الى النقطة $(4,-1)$ او الى النقطة $(-3,-2)$



خطط

كيف تحل المسألة؟ نجد نقطة منتصف القطعة المستقيمة ثم نقارن ايهما اقرب

حل

نجد المنصف بين $A(5,1)$ و $B(3,-5)$ باستخدام قانون المنصف ($x_1$ $y_1$ ، $x_2$ $y_2$)

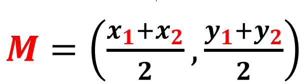
$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{5+3}{2},\frac{1+(-5)}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{8}{2},\frac{1-5}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{8}{2},\frac{-4}{2}\right)$$

$$M=(4,-2)$$



نجد المسافة بين $M(4,-2)$ و $(-3,-2)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d_1=\sqrt{(4+3)^2+(-2+2)^2}=\sqrt{49}=7$$ وحدات

نجد المسافة بين $M(4,-2)$ و $(4,-1)$

$$d_2=\sqrt{(4-4)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{1}=1$$ وحدة واحدة

من خلال المقارنة بين المسافتين وجدنا ان النقطة $(4,-1)$ هي اقرب الى نقطة المنصف



تحقق

المسافة بين $M(4,-2)$ و $(-3,-2)$ > من المسافة بين $M(4,-2)$ و $(4,-1)$

❹ **ثلاث عدائين:** الجدول أدناه يمثل نسبة ما قطعه ثلاث عدائين لمسافة مقدارها $160km$

| نسبة العداء الاول | نسبة العداء الثاني | نسبة العداء الثالث |
|---|---|---|
| 50% | 70% | 80% |

ما التقدير المعقول لما قطعه الشخص الاول والثالث ؟ أهو $100km$ ام $129km$



**إفهم**

ما معطيات المسألة؟ جدول لنسب ما قطعه ثلاث عدائين لمسافة $160km$

ما المطلوب من المسألة؟ ما التقدير المعقول لما قطعه الشخص الاول والثالث ؟ أهو $100km$ ام $129km$

**خطط**

كيف تحل المسألة؟ نجد نسبة العداء الاول والثالث من المسافة الكلية ثم نقارن بين التقديرين



**حل**

نحول نسبة $50\%$ الى كسر $\frac{50}{100}$ و $80\%$ الى كسر $\frac{80}{100}$



العداء الاول

$$\frac{160^{16}}{1} \times \frac{50^{5}}{100}$$

$$16 \times 5 = 80km$$

العداء الثالث

$$\frac{160^{16}}{1} \times \frac{80^{8}}{100}$$

$$16 \times 8 = 128km$$

اذن ما قطعه العداء الاول و الثالث $80 + 128 = 208km$



فيكون التقدير هو اقرب الى $129km$

**تحقق**

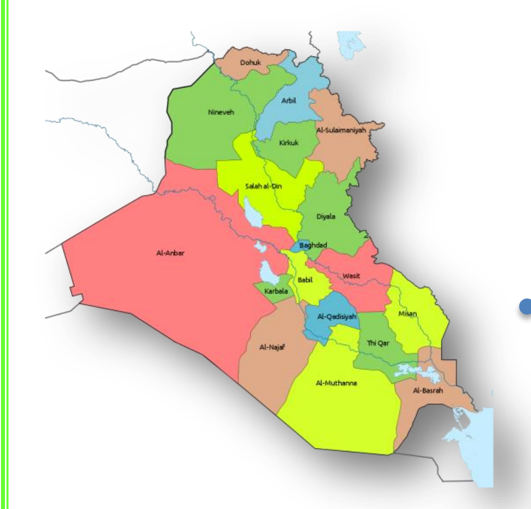


لانه العدد $208km$ وهو اقرب الى $129km$ من $100km$




❺ نسبة مسافة بين مدينتين: المسافة بين مدينتين هي $280km$ اتمثل نسبة $20\%$ من المسافة بين المدينتين تقريباً

$50km$ ام $69km$





ما معطيات المسألة؟ المسافة بين مدينتين هي $280km$

ما المطلوب من المسألة؟ اتمثل نسبة $20\%$ من المسافة بين المدينتين تقريباً

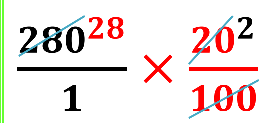
$50km$ ام $69km$



كيف تحل المسألة؟ نجد $20\%$ من المسافة ثم نقارن بين التقديرين

حلّ

نحول نسبة $20\%$ الى كسر $\frac{20}{100}$



$\frac{280^{28}}{1} \times \frac{20^{2}}{100}$

$28 \times 2 = 56km$

ازن اقرب الى $50km$



$20\%$ من المسافة هي $56km$ وهي اقرب الى $50km$

# الفصلُ 5

## الهندسة والقياس

## Geometric and Measurement





الاشكال المثلثة تعطي البناء قوة ومتانة حيث تميزت الكثير من اعمال الراحلة المهندسة العراقية زها حديد باستعمالها الاشكال الهندسية المثلثة، ومنها جسر في ابو ظبي بلغ ارتفاع راس المثلث 60m فوق مستوى سطح البحر.

جدول مراجعة لبعض قوانين (المحيط و المساحة و المساحة الجانبية و الكلية و الحجم للاشكال المجسمة) للاشكال الهندسية التي درستها سابقاً.

| اسم الشكل | رسم الشكل | المحيط | المساحة |
|---|---|---|---|
| المستطيل | b a | $P = 2(a+b)$ او مجموع اضلاعه الاربعة | $A = a \times b$ او الطول × العرض |
| المربع | L | $P = 4 \times L$ او مجموع اضلاعه الاربعة | $A = L \times L = L^2$ او طول الضلع × نفسه |
| المثلث القائم | h ℓ H | $P = h + H + \ell$ او مجموع اضلاعه الثلاثة | $A = \frac{1}{2}(H \times h)$ او نصف القاعدة × الارتفاع |
| المثلث متساوي الاضلاع | L | $P = L + L + L$ او مجموع اضلاعه الثلاثة | $A = \frac{\sqrt{3}}{4}(L)^2$ او مربع الضلع × $\frac{\sqrt{3}}{4}$ |
| شبة المنحرف | b h a | $P = a + b + c + d$ او مجموع اضلاعه الاربعة | $A = \frac{1}{2}(a+b) \times h$ او نصف القاعدتين × الارتفاع |
| المعين | L h | $P = 4 \times L$ او مجموع اضلاعه الاربعة | $A = L \times h$ او طول الضلع × الارتفاع |
| الدائرة | r | $P = 2r\pi$ او 2 × نصف القطر × النسبة الثابتة | $A = r^2\pi$ او مربع نصف القطر × النسبة الثابتة |

الاشكال المجسمة

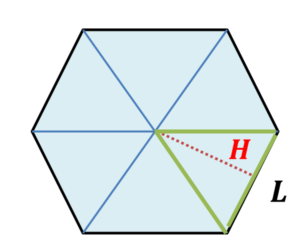
| اسم الشكل | رسم الشكل | المساحة الجانبية | المساحة الكلية | الحجم |
|---|---|---|---|---|
| الاسطوانة | r h r | $L.A = 2r\pi \times h$ او محيط القاعدة × الارتفاع | $T.A = 2r\pi \times h + 2r^2\pi$ او المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين | $V = r^2\pi \times h$ او مساحة القاعدة × الارتفاع |

انتباة: ◄ المحيط واطوال الاضلاع وحدة قياس واحدة $m, cm$ ,... \\ ◄ المساحات وحدتين قياس $m^2, cm^2$ ,..

◄ الحجوم ثلاث وحدات قياس $m^3, cm^3$ ,...

سوف نقسم الدرس الى قسمين الأول المضلعات و الثاني المجسمات

## اولاً المضلعات المنتظمة




المضلع المنتظم: وهو الشكل الهندسي الذي تكون جميع اطوال اضلاعه متساوية لذلك يسمى بالمنتظم.

في هذه الدرس سوف نتعلم إيجاد المساحة و المحيط لهذه المضلعات و حسب القوانين التالية:

| | |
|---|---|
| محيط المضلع المنتظم = عدد الاضلاع × طول المضلع او مجموع اطوال الاضلاع | $P = n \times L$ |
| مساحة المضلع المنتظم = مساحة المثلث الذي رأسه مركز المضلع وقاعدته ضلع المضلع (المثلث القائم) × عدد اضلاعه | $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$ |

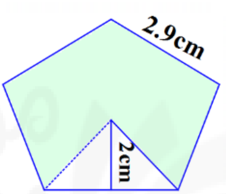
حيث ان: $n$ = عدد اضلاع المضلع المنتظم ، $L$ = طول الضلع ، $H$ (العامد) = العمود النازل من مركز المضلع على احد اضلاعه بصورة قائمة

مساحة المثلث القائم: $A = \frac{1}{2} L \times H$. لايجاد أي ضلع مجهول في المثلث القائم نستخدم نظرية فيثاغورس الذي درستها في الفصل الرابع الذي تنص على ان $(\text{الضلع القائم})^2 + (\text{القاعدة})^2 = (\text{الوتر})^2$

### مثال 1

جد محيط ومساحة المضلع المنتظم التالي




$n = 5, L = 2.9cm , H = 2cm$ نكتب المعطيات

$P = n \times L$ نكتب قانون المحيط ثم نعوض المعطيات

$P = 5 \times 2.9 = 14.5cm$

$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$ نكتب قانون المساحة ثم نعوض المعطيات

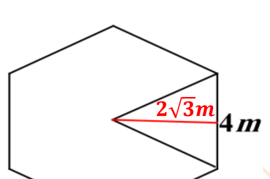
$A = \frac{1}{2} \times 2.9 \times 2 \times 5$

$A = 2.9 \times 5 = 14.5cm^2$

### مثال 2

جد محيط و مساحة المضلع المنتظم التالي ؟

نلاحظ ان عدد الاضلاع الخارجية للشكل هي 6 اضلاع




$2\sqrt{3}m$   $4m$

$n = 6, L = 4m , H = 2\sqrt{3}m$ نكتب المعطيات

$P = n \times L$ نكتب قانون المحيط ثم نعوض المعطيات

$P = 6 \times 4 = 24m$

$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$ نكتب قانون المساحة ثم نعوض المعطيات

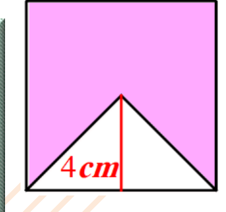
$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6$

$A = 4 \times \sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}\ m^2$

## مثال 3

جد مساحة المربع الذي فية طول العامد $4cm$

SoL:




ملاحظة: فقط في المربع طول الضلع يساوي ضعف طول العامد لان العامد يمثل نصف القطر في المربع

نكتب المعطيات $n = 4 , L = 2 \times 4 = 8cm , H = 4\ m$

نكتب قانون المساحة ثم نعوض المعطيات $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$

$A = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times 4$

$A = 4 \times 4 \times 4 = 64\ cm^2$

او بطريقة قانون مساحة المربع

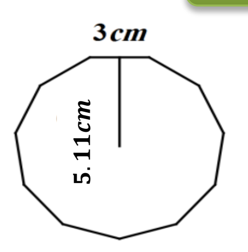
$A = L \times L$

$A = 8 \times 8 = 64\ cm^2$

## :H.W

جد مساحة و محيط المضلعات المنتظمة التالية:

❶




❷





ANS:

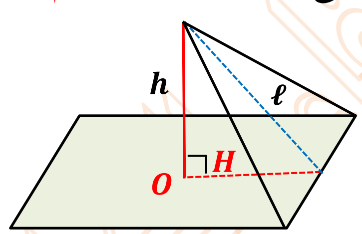
❶ $P = 33cm\ ,\ A = 84.33cm$

❷ $P = 14\sqrt{3}cm\ ,\ A = 21\sqrt{3}cm$

## ثانياً المجسمات (الهرم والمخروط)

سوف نقسم المجسمات الى نوعين الأول الهرم و الثاني المخروط

النوع الأول: الهرم : هو مجسم لة في الأقل ثلاثة اوجة مثلثة الشكل ولة قاعدة واحدة تعبر عن شكل مضلع (شكل القاعدة يحدد اسم الهرم)




حيث ان: $h$= الارتفاع ، $H$= العامد ، $\ell$= الارتفاع الجانبي

لا تنسى: لايجاد أي مجهول من الرموز أعلاه نستخدم نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$(\ell)^2 = (h)^2 + (H)^2$

سوف نتعلم كيف إيجاد المساحة الجانبية و المساحة الكلية و ا الحجم . من خلال القوانين ادناة.

| المساحة الجانبية للهرم | المساحة الكلية للهرم | الحجم للهرم |
|---|---|---|
| $L.A = \frac{1}{2} P \times \ell$ | $T.A = \frac{1}{2} P \times \ell + b$<br>مساحة القاعدة + المساحة الجانبية = المساحة الكلية | $V = \frac{1}{3} b \times h$ |

حيث ان: $b$ = هي مساحة قاعدة الهرم تأخذ قانون مساحة الشكل الهندسي للقاعدة. مثلاً : لوكانت قاعدة الهرم مربعة فتاخذ قانون المساحة للمربع

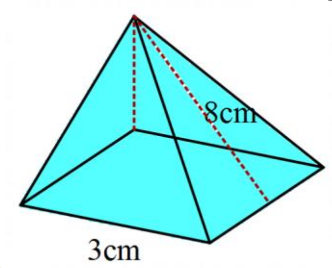
$P$ = هي محيط قاعدة الهرم وأيضا تأخذ قانون محيط الشكل الهندسي للقاعدة.



**مثال 4** جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لهرم منتظم ارتفاعه الجانبي $8cm$ وقاعدته المربعة طول ضلعها $3cm$ .

SoL:

نكتب المعطيات $\ell = 8cm , L = 3cm$ ، قاعدة الهرم مربعة




محيط المربع $P = 4 \times L$

نكتب قانون المساحة الجانبية $L.A = \frac{1}{2} P \times \ell$

$L.A = \frac{1}{2} \times (4 \times 3) \times 8 = \frac{1}{2} \times 12 \times 8$

$L.A = 12 \times 4 = 48cm^2$

مساحة المربع $b = L \times L$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة او $T.A = \frac{1}{2} P \times \ell + b$

المساحة الكلية $= 48 + (3 \times 3) = 48 + 9$

المساحة الكلية $= 57cm^2$

توصيات حول حل امثلة الهرم:

- معرفة نوع قاعدة الهرم لغرض استخراج المحيط والمساحة لها ← كتابة معطيات السؤال على جهة لتكون امامك
- الرسم غير مطلوب اذا كان السؤال على شكل معطيات

**مثال 5** جد الحجم و المساحة الجانبية و الكلية للهرم الذي مساحة قاعدته $54\sqrt{3}cm^2$ ومحيط قاعدته $36cm$ وارتفاعه $3\sqrt{6}cm$ وارتفاعه الجانبي $9cm$ ؟

SoL: $b = 54\sqrt{3}cm^2 , p = 36cm , h = 3\sqrt{6}cm , \ell = 9cm$

نعوض المعطيات بقانون الحجم $V = \frac{1}{3} b \times h$

$V = \frac{1}{3} \times 54\sqrt{3} \times 3\sqrt{6}$ $\quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$V = 54\sqrt{18} = 54 \times 3\sqrt{2} = 162\sqrt{2}\ cm^3$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية $L.A = \frac{1}{2} P \times \ell$

$L.A = \frac{1}{2} \times 36 \times 9$

$L.A = 18 \times 9 = 162cm^2$

$\sqrt{3} \approx 1.7$

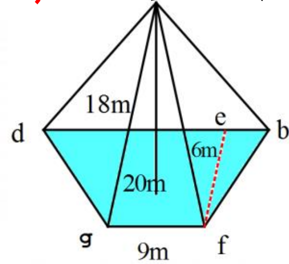
$54\sqrt{3} = 54 \times 1.7$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة الكلية $= 162 + 54\sqrt{3}$

المساحة الكلية $= 162 + 91.8 = 253.8cm^2$

**مثال 6** جد حجم الهرم المجاور الذي قاعدته شبة منحرف ؟




SoL: $h = 20m , ef = 6cm , gf = 9cm , db = 18cm$

$V = \frac{1}{3} b \times h$

مساحة شبة المنحرف $b = \frac{1}{2}(db + gf) \times ef$

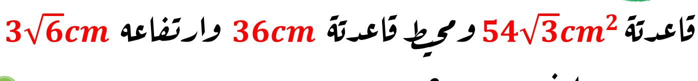
$b = \frac{1}{2}(18 + 9) \times 6$

$b = 27 \times 3 = 81cm^2$ نعوضها بقانون الحجم

$V = \frac{1}{3} \times 81 \times 20$

$V = \frac{1}{3} \times 81 \times 20 = 27 \times 20$

$V = 540\ cm^3$



## مثال 7

جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مضلع ثماني منتظم طول ضلعه $1.16cm$ وارتفاعه الجانبي $2cm$

SoL:

$n = 8, L = 1.16, \ell = 2cm$

$L.A = \frac{1}{2} P \times \ell$ ← محيط الثماني $P = n \times L$

$L.A = \frac{1}{2} \times (8 \times 1.16) \times 2$

$L.A = \frac{1}{2} \times (9.28) \times 2 \Rightarrow L.A = 9.28cm^2$

## مثال 8

جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية للهرم الذي قاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه $6cm$ وارتفاعه $\sqrt{33}cm$ والارتفاع الجانبي $6cm$؟

SoL:

قاعدته مثلث متساوي الاضلاع $h = \sqrt{33}cm, L = 6cm, \ell = 6cm$

$V = \frac{1}{3} b \times h$ ← مساحة المثلث $b = \frac{\sqrt{3}}{4} \times L^2$

$b = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 9\sqrt{3}cm^2$

$V = \frac{1}{3} \times (9\sqrt{3}) \times \sqrt{33}$

$V = 3\sqrt{99} = 9\sqrt{11}cm^3$

$L.A = \frac{1}{2} P \times \ell$ ، محيط المثلث $P = 3 \times L$

$L.A = \frac{1}{2} \times (3 \times 6) \times 6$

$L.A = \frac{1}{2} \times 18 \times 6 = 54cm^2$

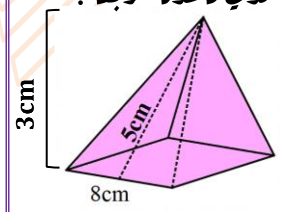
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة الكلية $= 54 + 9\sqrt{3}$ ، $9\sqrt{3} \approx 9 \times 1.7 \approx 15.3$

المساحة الكلية $\approx 69.3cm^2$

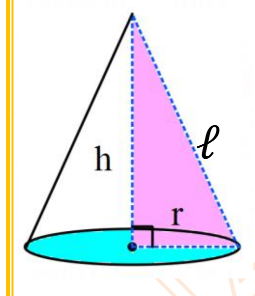
## :H.W

1. هرم قاعدته مربعة طول ضلعها $12cm$ وارتفاعه $8cm$ و ارتفاعه الجانبي $10cm$؟ جد الحجم و المساحة الجانبية و الكلية
2. جد حجم هرم ارتفاعه $8cm$ وقاعدته خماسي منتظم مساحته $24cm^2$؟
3. جد حجم هرم قاعدته مثلث منتظم وطول ضلعه $6m$ وارتفاعه $13m$؟
4. جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة طول ضلعها $8cm$ وارتفاعه الجانبي $7.2cm$؟
5. جد الحجم و المساحة الجانبية و الكلية للهرم المجاور الذي قاعدته مربعة.




ANS:
1. $384cm^3, 240cm^2, 384cm^2$
2. $64cm^3$
3. $39\sqrt{3}m^3$
4. $115.2cm^2$
5. $64cm^3, 80cm^2, 144cm^2$

**النوع الثاني: المخروط**: هو مجسم له قاعدة واحدة فقط و تكون عبارة عن دائرة وله راس واحد.




حيث ان: $h$= الارتفاع ، $\ell$ = الارتفاع الجانبي (مولد المخروط) ، $r$= نصف قطر الدائرة

لايجاد أي مجهول من الرموز أعلاه نستخدم نظرية فيثاغورس الخاصة بالمثلث القائم الزاوية $(\ell)^2 = (h)^2 + (r)^2$.

سوف نتعلم كيف إيجاد المساحة الجانبية و المساحة الكلية و الحجم . من خلال القوانين ادناه.

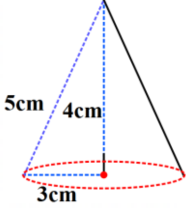
| المساحة الجانبية للمخروط | المساحة الكلية للمخروط | حجم المخروط |
|---|---|---|
| $L.A = \frac{1}{2}(2r\pi) \times \ell$<br>$L.A = r\pi \times \ell$<br>المساحة الجانبية = الارتفاع الجانبي × نصف محيط الدائرة | $T.A = r\pi \times \ell + r^2\pi$<br>المساحة الكلية = الجانبية + مساحة الدائرة | $V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$<br>الحجم = الارتفاع × ثلث مساحة الدائرة |

حيث ان: $\pi$ = النسبة الثابتة وقيمتها $\frac{22}{7}$ او $3.14$ و $r^2\pi$ مساحة الدائرة و $2r\pi$ محيط الدائرة

← المخروط لا يحتاج الى تحديد شكل القاعدة لان قاعدته فقط الدائرة بينما الهرم تكون قاعدته شكلها مضلع (مثلث، مربع ، خماسي ،.......)

## مثال 9

استخدم الشكل المجاور لايجاد المساحة الجانبية و المساحة الكلية والحجم




SoL:

نستخرج المعطيات من الرسم الذي يمثل هرم لان قاعدته دائرة

$r = 3cm, h = 4cm , \ell = 5cm$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية $L.A = r\pi \times \ell$

$L.A = 3\pi \times 5$

$L.A = 15\pi\ cm^2$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الكلية $T.A = r\pi \times \ell + r^2\pi$

$T.A = 15\pi + 3^2\pi$

$T.A = 15\pi + 9\pi$

$T.A = 24\pi\ cm^2$

نعوض المعطيات بقانون الحجم $V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$

$V = \frac{1}{3} \times 3^2\pi \times 4$

$V = \frac{1}{3} \times {}^{3}9\pi \times 4$

$V = 3\pi \times 4 = 12\pi\ cm^3$

## مثال 10

جد المساحة الجانبية و المساحة الكلية لمخروط دائري قائم قطر قاعدته 35m وارتفاعه الجانبي 20m. واكتب الجواب بدلالة π ؟

SoL:

$r = \frac{35}{2} = 17.5m , \ell = 20m$ لان المعطى قطر وليس نصف قطر

نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية $L.A = r\pi \times \ell$

$L.A = 17.5\pi \times 20$

$L.A = 350\pi\ cm^2$

$T.A = r\pi \times \ell + r^2\pi$

$T.A = 350\pi + (17.5)^2\pi$

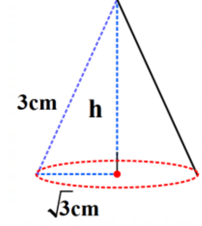
$T.A = 350\pi + 306.25\pi$

$T.A = 656.25\pi\ cm^2$

$(1.5)^2 = 17.5 \times 17.5$ ثم نرفع الفوارز ونضرب ضرب عمودي ثم نرجعها

## مثال 11

استخدم الشكل المجاور لايجاد الحجم و المساحة الجانبية و المساحة الكلية




SoL:

نستخرج المعطيات من الرسم الذي يمثل هرم لان قاعدته دائرة

$r = \sqrt{3}cm , h = ? , \ell = 3cm$

نلاحظ ان الارتفاع h مجهول فلا نستطيع إيجاد حجم المخروط

لو كان المطلوب المساحة الجانبية و الكلية فقط فلا نحتاج للارتفاع

نستخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد الارتفاع $(\ell)^2 = (h)^2 + (r)^2$

$3^2 = (h)^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9 = h^2 + 3 \Rightarrow h^2 = 9 - 3$

$h^2 = 6 \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} h = \sqrt{6}cm$

نعوض المعطيات بقانون الحجم $V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$

$V = \frac{1}{3} \times (\sqrt{3})^2\pi \times \sqrt{6}$

$V = \frac{1}{3} \times 3\pi \times \sqrt{6} = \sqrt{6}\pi\ cm^3$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية $L.A = r\pi \times \ell$

$L.A = \sqrt{3}\pi \times 3 = 3\sqrt{3}\pi\ cm^2$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الكلية $T.A = r\pi \times \ell + r^2\pi$

$T.A = 3\sqrt{3}\pi + (\sqrt{3})^2\pi = 3\sqrt{3}\pi + 3\pi$

$T.A = 5.1\pi + 3\pi = 8.1\pi\ cm^2$

## مثال 12

جد المساحة السطحية و الحجم للمخروط ازا علمت ان مساحة قاعدته $9\pi\ cm^2$ وارتفاعة الجانبي $5\ cm$؟

SOL:

$r=?\,, h=?\,, \ell=5cm\,, r^2\pi=9\pi\ cm^2$

المقصود من المساحة السطحية هي نفسها المساحة الجانبية

$L.A = r\pi\times\ell$

ملاحظة: عندما يكون $r$ مجهول و معطى في السؤال مساحة او محيط الدائرة نستخرجه من خلالها . في هذه السؤال المعطى هو مساحة القاعدة (الدائرة)

$r^2\pi = 9\pi \xrightarrow{\div\pi} r^2 = 9 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} r = 3cm$

$L.A = 3\pi\times 5$ نعوض المعطيات بقانون المساحة الكلية

$L.A = 15\pi = 15\pi\ cm^2$

والان نجد حجم المخروط $V=\frac{1}{3}\times r^2\pi\times h$

سوف نجد $h$ باستخدام نظرية فيثاغورس $(\ell)^2=(h)^2+(r)^2$

$5^2=(h)^2+3^2 \Rightarrow 25=h^2+9$

$h^2=25-9\Rightarrow h^2=16 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} h=4cm$

$V=\frac{1}{3}\times 3^2\pi\times 4$ نعوض المعطيات بقانون الحجم

$V=\frac{1}{3}\times {}^{3}9\pi\times 4$

$V=12\pi\ cm^3$

## مثال 13

جد حجم الشكل المركب المجاور؟

SoL:

نلاحظ ان الشكلين عبارة عن مخروطين كبير وصغير ولايجاد حجم الشكل يجب علينا إيجاد حجم الكبير والصغير و نجمعهما معاً

$V_{\text{كبير}}=\frac{1}{3}\times r^2\pi\times h \quad , r=9m\,, h=18m$

$V_{\text{كبير}}=\frac{1}{3}\times 9^2\pi\times 18=\frac{1}{3}\times {}^{27}81\pi\times 18$

$V_{\text{كبير}}=27\pi\times 18=486\pi\ cm^3$

$V_{\text{صغير}}=\frac{1}{3}\times r^2\pi\times h \quad , r=2m\,, h=6m$

$V_{\text{صغير}}=\frac{1}{3}\times 2^2\pi\times 6=\frac{1}{3}\times 4\pi\times {}^{2}6$

$V_{\text{صغير}}=4\pi\times 2=8\pi\ cm^3$

$V_{\text{الشكل}}=V_{\text{كبير}}+V_{\text{صغير}}=486\pi+8\pi=494\pi\ cm^3$

## مثال 14

جد حجم الجسم المركب المجاور؟

SoL:

نلاحظ ان الشكلين عبارة عن مخروط واسطوانة ولايجاد حجم الشكل يجب علينا إيجاد حجم المخروط و الأسطوانة و نجمعهما معاً

$V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{3}\times r^2\pi\times h \quad , r=6cm\,, h=30cm$

$V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{3}\times 6^2\pi\times 30$

$V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{3}\times 36\pi\times {}^{10}30$

$V_{\text{مخروط}}=360\pi\ cm^3$

$V_{\text{اسطوانة}}=r^2\pi\times h \quad , r=6cm\,, h=20cm$

$V_{\text{اسطوانة}}=6^2\pi\times 20$

$V_{\text{اسطوانة}}=36\pi\times 20$

$V_{\text{اسطوانة}}=720\pi\ cm^3$

$V_{\text{الشكل}}=V_{\text{مخروط}}+V_{\text{اسطوانه}}=360\pi+720\pi$

$V_{\text{الشكل}}=1080\pi\ cm^3$

## :H.W

❶ جد الحجم و المساحة الجانبية و المساحة الكلية؟ للشكل المجاور

$Ans: 12\pi cm^3, 15\pi cm^2, 24\pi cm^2$

❷ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته $225\pi\ cm^2$ ومحيط قاعدته $30\pi cm$ وارتفاعه $20cm$ وارتفاعه الجانبي $25cm$ جد الحجم و المساحة الجانبية و الكلية؟

$Ans: 1500\pi cm^3, 375\pi cm^2, 600\pi cm^2$

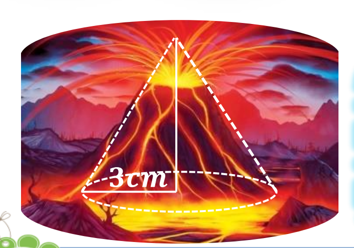
❸ جد حجم الشكل المركب المجاور؟

انتبه: عندما تجد حجم المخروطين لا تجمع بل اطرح لان المخروط الصغير داخل الكبير

$Ans: \frac{128}{3}\pi m^3$

## مسائل حياتية

❶ **علوم** : نموذج بركاني على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته 3cm اذا كان حجم النموذج $203\ cm^3$ تقريباً ، ما ارتفاعه؟




**SoL:** $r = 3cm\ , V = 203\pi\ cm^3 , h = ?$

من خلال قانون حجم المخروط سوف نجد الارتفاع، لان الحجم معطى

نعوض المعطيات بقانون الحجم

$V = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$

$203\pi = \frac{1}{3} \times 3^2\pi \times h$

$203\pi = \frac{1}{3} \times {}^{3}9\pi \times h$

نقسم الطرفين على

$[203 = 3\pi h] \div 3\pi$

$\frac{203}{3\pi} = \frac{3\pi h}{3\pi}$

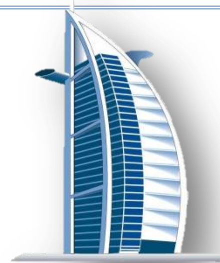
$h = \frac{203}{3\pi}$

$3\pi = 3 \times 3.14 \approx 9.42$

نعوض بقيمة $\pi$ اذ كان المطلوب نصف القطر او الارتفاع

$h = \frac{203}{9.42} \approx 21.5cm$

❷ **بناء** : يبلغ ارتفاع برج العرب 321m ويمثل هرماً مقوساً ، احسب المساحة التقريبية لقاعدته اذا كان حجم الهرم $1904000\ cm^3$؟



**SoL:** $V = 1904000\ cm^3 , h = 321m$

الشكل يمثل هرم ازن نجد مساحة القاعدة $b$ من خلال قانون حجم الهرم

نعوض المعطيات بقانون الحجم

$V = \frac{1}{3} \times b \times h$

$1904000 = \frac{1}{3} \times b \times 321$

$1904000 = \frac{1}{3} \times b \times {}^{107}321$

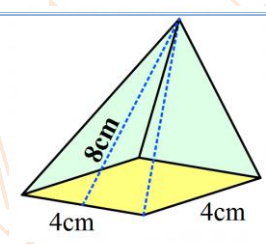
$[1904000 = 107b] \div 107$

$\frac{1904000}{107} = b$

$b \approx 17794\ m^2$

هي مساحة القاعدة التقريبية

❸ **هندسة** : جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل والمبين بالشكل المجاور




**SoL:** الشكل هو هرم لان قاعدته مربعة $\ell = 8cm\ , L = 4cm$

نعوض المعطيات بقانون المساحة الجانبية للهرم

$L.A = \frac{1}{2} \times P \times \ell$

محيط المربع $P = 4 \times L$

$L.A = \frac{1}{2} \times (4 \times 4) \times 8$

$L.A = \frac{1}{2} \times 16 \times 8$

$L.A = 8 \times 8 = 64\ cm^2$




## اولاً تحدٍّ

مخروط واسطوانة لهما نفس القاعدة و الحجم ، قطر الأسطوانة 40cm وارتفاعها 7cm ، ماهي المساحة الجانبية للمخروط

SoL:

في مثل هكذا اسئلة نذهب مباشرةً الى المطلوب من السؤال.

المطلوب هو المساحة الجانبية للمخروط نكتب قانونها $L.A = r\pi \times \ell$

اذن يجب علينا إيجاد $\ell$ للمخروط لان $r$ الأسطوانة نفس المخروط

معطيات السؤال $h_{اسطوانه} = 7cm$ , $r_{اسطوانه و مخروط} = \frac{40}{2} = 20cm$

نعوض معطيات الأسطوانة لإيجاد حجمها

$V_{اسطوانة} = r^2\pi \times h$

$V_{اسطوانة} = 20^2\pi \times 70 = 400\pi \times 70$

$V_{اسطوانة} = 2800\pi\ cm^3$ وهو نفسه حجم المخروط لانهما متساويان في السؤال

$V_{مخروط} = \frac{1}{3} \times r^2\pi \times h$ , $r_{مخروط} = 20cm$

$2800\pi = \frac{1}{3} \times 20^2\pi \times h$

$2800\pi = \frac{1}{3} \times 400\pi \times h$

$2800\pi = \frac{400\pi h}{3}$

$[2800\pi = 133.3\pi h] \div 133.3\pi$

$h_{مخروط} = \frac{2800 \not\pi}{133.3 \not\pi} \approx 21cm$

ومن نظرية فيثاغورس نجد $\ell$ للمخروط $(\ell)^2 = (h)^2 + (r)^2$

$(\ell)^2 = 21^2 + 20^2 \Rightarrow (\ell)^2 = 441 + 400$

$(\ell)^2 = 841 \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} \ell_{مخروط} = 29cm$

الان نجد المساحة الجانبية للمخروط $\ell_{مخروط} = 29cm$ , $r_{مخروط} = 20cm$

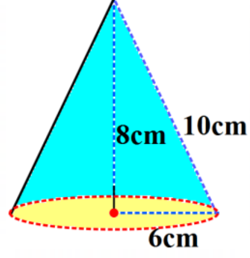
$L.A = r\pi \times \ell$

$L.A = 20\pi \times 29$

$L.A = 580\pi\ cm^2$




أي الحلين خطأ ؟ وضح اجابتك




| الحل الثاني | الحل الاول |
|---|---|
| $V = \frac{1}{3} \times b \times h$<br>$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \pi \times 8 = 96\pi\ m^3$ | $V = \frac{1}{3} \times b \times h$<br>$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \pi \times 10 = 120\pi\ m^3$ |

SoL:

الحل الأول خطأ لان مقدار $h = 8cm$ وليس $h = 10cm$ لذلك يكون الحل الثاني هو الصحيح $V = 96\pi\ m^3$




مسألة عن مضلع منتظم تسمح المعطيات فيه بإيجاد محيط المضلع و مساحته .

SoL:

راجع المثال الأول من هذه الدرس او أي مثال يخص منطوق السؤال أعلاه






## الدرس [5-1] المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)

## Polygons and Polyhedrons (Pyramid and Cone)

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 محيط الثماني المنتظم المجاور؟

7cm

a) 45.5 cm b) 48 cm c) 38.3 cm d) 56 cm ✓

2 محيط مربع مساحته $225m^2$ هو:

a) 25m b) 20 m c) 15 m d) 60 m ✓

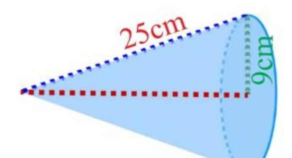
3 محيط خماسي منتظم طول عامده 3m ونصف قطر دائرته 5m هو:

a) 16.2 m  b) 40 m ✓ c) 16 m d) 10.49 m

4 مساحة سباعي منتظم طول عامده 6cm وطول ضلعه 7.5cm هو:

a) $157.5\ cm^2$ ✓ b) $28.5\ cm^2$ c) $28\ m^2$ d) $9975\ m^2$

5 المساحة الجانبية للمخروط في الشكل المجاور هو:




a) $360\pi\ cm^2$ b) $225\pi cm^2$ ✓ c) $369\pi\ cm^2$ d) $1640\pi\ cm^2$

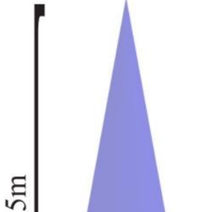
6 حجم هرم قاعدته مربعة طول كل ضلع 18cm وارتفاعه 20cm .

a) $2160cm^3$ ✓ b) $120\ cm^3$ c) $260\ cm^3$ d) $134\ cm^3$

7 المساحة الكلية لمخروط مساحة قاعدته $25\pi cm^2$ وارتفاعه 12cm هو:

a) $108\pi\ cm^2$ b) $27\pi\ cm^2$ c) $208\pi\ cm^2$ d) $90\pi cm^2$ ✓

8 الفرق بين حجم المخروطين هو:

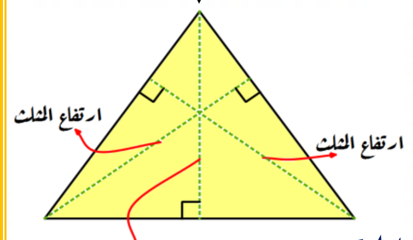



a) $27\pi\ m^3$ b) $75\pi\ m^3$ c) $48\pi\ m^3$ d) $21\pi\ m^3$

بعض الرموز الرياضية التي سنستخدمها في هذه الفصل.

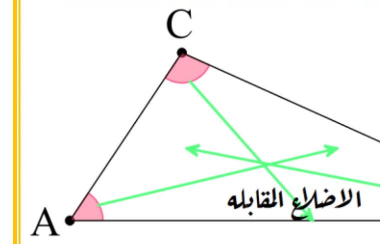
| الرمز | معناه | الرمز | معناه |
|---|---|---|---|
| ≅ | يطابق | ↔ | مستقيم |
| ∼ | يشابه | — | قطعة مستقيم |
| ∠ | زاوية | Δ | مثلث |
| $m$ | قياس (تستخدم مع الزوايا) | // | يوازي |
| ° | درجة (وحدة قياس الزوايا) | ⊥ | عمودي |

## الدرس (5 – 2) المثلثات




تعرفنا سابقاً الى خواص المثلث وتتعرف في هذه الدرس الى:-

1) **القطعة المتوسطة في المثلث :** هي قطعة مستقيمة طرفاها احد رؤوس المثلث ونقطة منصف الضلع المقابل لذلك الرأس
ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى مركز المثلث O الذي هي نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث.




2) **ارتفاع المثلث:** هو العمود النازل من رؤوس المثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس
ولكل مثلث ثلاث ارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة تسمى (ملتقى الارتفاعات)

لذلك سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين الأول الاضلاع و الزوايا في المثلث و الثاني تشابه المثلثات

## اولاً الاضلاع والزوايا في المثلث: في هذه البند سوف ندرس مبرهنات لكل مثلث و نقبلها بدون برهان




اذا تباين ضلعا مثلث تباينت الزاويتان المقابلتان لهما ، فأكبرهما تقابل الضلع الأكبر وبالعكس.

$$\overline{BC} > \overline{AC} \Leftrightarrow m\angle A > m\angle B$$

(شكل: مثلث ABC، الاضلاع المقابلة)

الزاوية $\angle B$ يقابلها الضلع $\overline{AC}$ ، الزاوية $\angle A$ يقابلها الضلع $\overline{BC}$

الزاوية $\angle C$ يقابلها الضلع $\overline{AB}$ . فاذا كان الضلع اكبر الاضلاع فتكون الزاوية الذي تقابله اكبر الزوايا في المثلث

**تذكير1:** مجموع زوايا المثلث $180°$ ، $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

**تذكير2:**-يمكن كتابة رموز الاضلاع من البداية الى النهاية او العكس . مثلاً : $\overline{AB}$ يمكن كتابته $\overline{BA}$





رتب الزوايا في المثلث ادناه من الأصغر الى الأكبر؟

SoL

الضلع $\overline{BC}$ اكبر ضلع فتكون الزاوية المقابلة له $m\angle A$ اكبر زاوية

الضلع $\overline{AB}$ اصغر ضلع فتكون الزاوية المقابلة له $m\angle C$ اصغر زاوية

ترتيب الزوايا من الأصغر الى الأكبر (تصاعدي) $m\angle C, m\angle A, m\angle B$

او اذا كان السؤال (تنازلي) من الأكبر الى الاصغر $m\angle B, m\angle A, m\angle C$

ملاحظة: الترتيب من اليسار الى اليمين لان كتابة الرموز انكليزية



في المثلثات ادناه رتب الاضلاع من الأقصر الى الأطول.

❶ SoL

بما انه الزوايا قياساتها معلومة فنقارن اطوال الاضلاع من الزوايا

يجب ان نجد قياس الزاوية $m\angle C$ من خلال مجموع زوايا المثلث

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Longrightarrow 73° + 45° + \angle C = 180°$

$118° + \angle C = 180° \Longrightarrow \angle C = 180° - 118°$

$\angle C = 62°$

الزاوية $m\angle A$ اكبر زاوية فيكون الضلع المقابل لها $\overline{BC}$ اطول ضلع

الزاوية $m\angle B$ اصغر زاوية فيكون الضلع المقابل لها $\overline{AC}$ اقصر ضلع

ترتيب الاضلاع من الاقصر الى الأطول (تصاعدي) $\overline{AC}, \overline{BA}, \overline{BC}$

او اذا كان السؤال (تنازلي) من الاطول الى الأقصر $\overline{BC}, \overline{BA}, \overline{AC}$

❷ SoL

يجب ان نجد قياس الزاوية $m\angle C$ و $m\angle A$

$m\angle C$ زاوية قائمة فيكون قياسها $m\angle C = 90°$ و نجد $m\angle A$ من المجموع

$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Longrightarrow \angle A + 70° + 90° = 180°$

$\angle A = 180° - 160° \Longrightarrow \angle A = 20°$

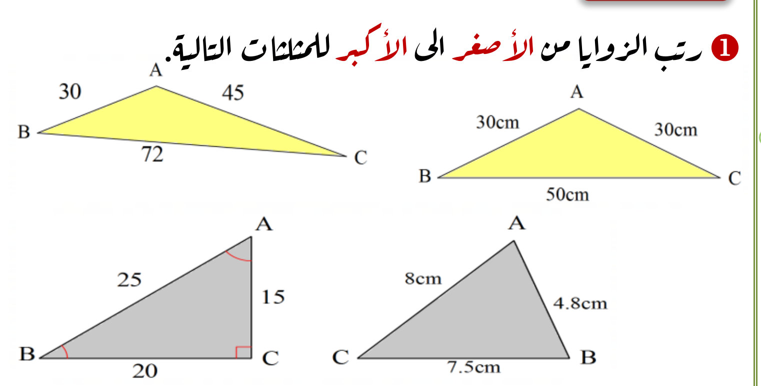
الزاوية $m\angle C$ اكبر زاوية فيكون الضلع المقابل لها $\overline{AB}$ اطول ضلع

الزاوية $m\angle A$ اصغر زاوية فيكون الضلع المقابل لها $\overline{BC}$ اقصر ضلع

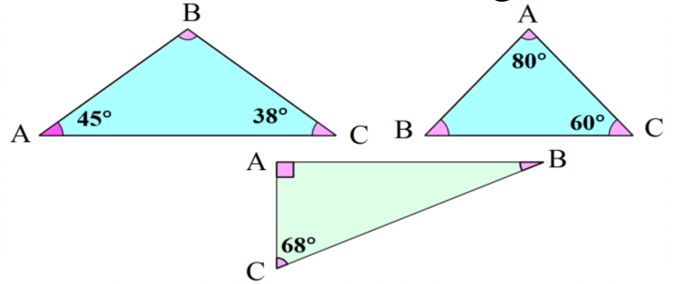
ترتيب الاضلاع من الاقصر الى الأطول (تصاعدي) $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$

H.W

❶ رتب الزوايا من الأصغر الى الأكبر للمثلثات التالية.



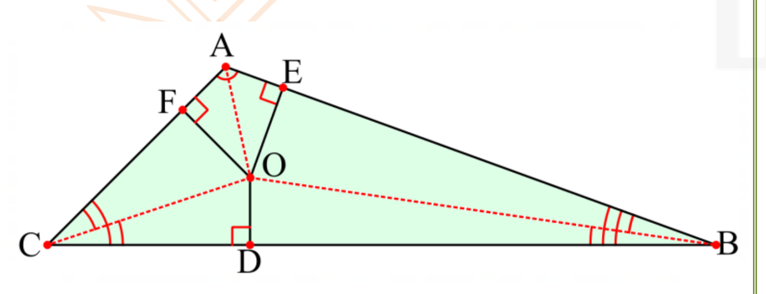

❷ رتب الاضلاع من الاطول الى الاقصر للمثلثات التالية.


مبرهنة 2

منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن اضلاعه. (والعكس صحيح)

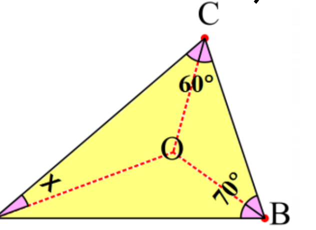
اذا كان $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ منصفات الزوايا $A, B, C$ على الترتيب تلتقي في نقطة $O$ ، فأن $OD = OE = OF$




سوف نأخذ عليها مثال

## مثال 3

في المثلث المجاور جد قيمة $x$ .




SoL

$\overline{CO}$ تنصف الزاوية $\angle C$ ، $\overline{BO}$ تنصف الزاوية $\angle B$

اذن $O$ هي نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث

فيكون $\overline{OA}$ منصف الزاوية $\angle A$ ) حسب مبرهنة 2 ، $x = \frac{1}{2} m\angle A$

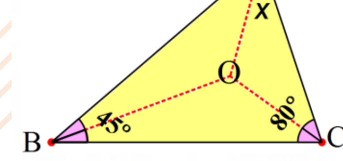
$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Longrightarrow \angle A + 70° + 60° = 180°$

$\angle A + 130° = 180° \Longrightarrow \angle A = 180° - 130°$

$\angle A = 50° \quad \Longrightarrow \quad \therefore x = 25°$

## H.W

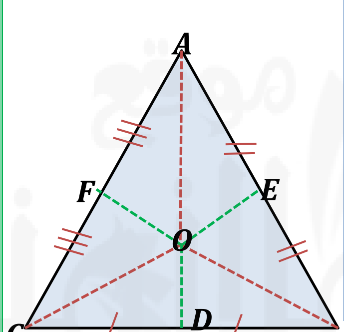
في المثلث المجاور اذا كان: $\overline{CO}, \overline{BO}, \overline{AO}$ منصفات الزوايا $A, B, C$ جد قيمة $m\angle x$ .

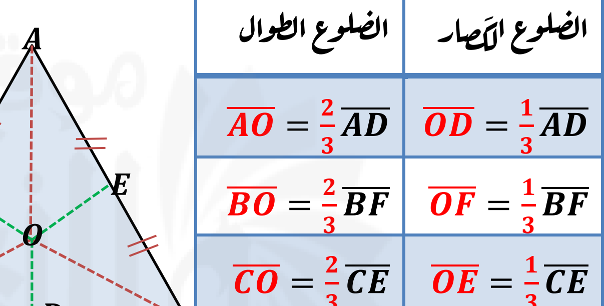



Ans: $m\angle x = 27.5°$

## مبرهنة 3

القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تسمى مركز ثقل المثلث ، وتُقسم كل منها بنسبة $\frac{2}{3}$ من جهة الرأس الى منتصف الضلع المقابل .



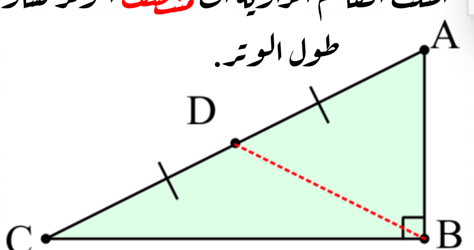



| الضلوع الطوال | الضلوع القصار |
|---|---|
| $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ | $\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{AD}$ |
| $\overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{BF}$ | $\overline{OF} = \frac{1}{3}\overline{BF}$ |
| $\overline{CO} = \frac{2}{3}\overline{CE}$ | $\overline{OE} = \frac{1}{3}\overline{CE}$ |

ترجمة المبرهنة: الضلع الذي ينطلق من رأس المثلث الى منتصف الضلع المقابل له يقسم الى ثلاثة اثلاث : ثلثين $\frac{2}{3}$ منه تأخذه القطعة الذي وصلت الى المنتصف والباقي منه $\frac{1}{3}$ تأخذه القطعة الذي الكلت الطريق من المركز الى منتصف الضلع المقابل .

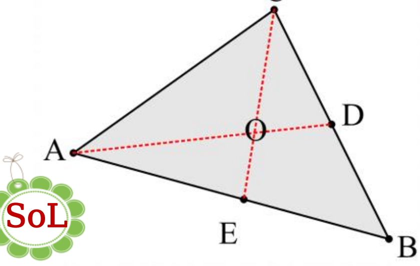
## مبرهنة 4

طول القطعة المستقيمة المرسومة من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر .




## مثال 4

المثلث $ABC$ فيه، $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في $O$ ، $AD = 6cm$ , $CE = 9cm$ ، جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$




SoL

بما انه $\overline{CE}$ قطعة متوسطة اذن من مبرهنة 3 نجد طول الضلع $\overline{OE}$ الأقصر

$\overline{OE} = \frac{1}{3}\overline{CE}$

نعوض قيمة $CE = 9cm$ بالقانون

$\overline{OE} = \frac{1}{3} \times {}^{3}9$

$\overline{OE} = 3cm$

بما انه $\overline{AD}$ قطعة متوسطة اذن من مبرهنة 3 نجد طول الضلع $\overline{AO}$ الطويل

$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AD}$

نعوض قيمة $AD = 6cm$ بالقانون

$\overline{AO} = \frac{2}{3} \times {}^{2}6$

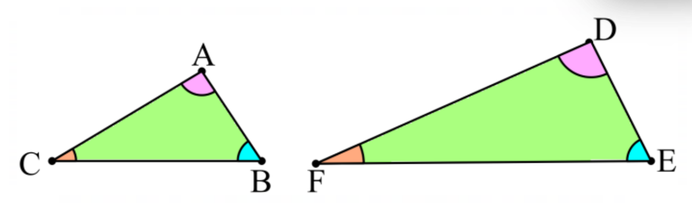
$\overline{AO} = 4cm$



## ثانياً التشابه في المثلثات

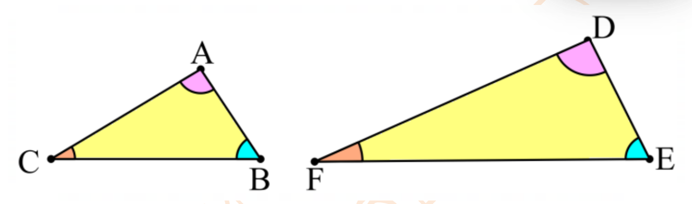
**المثلثان المتشابهان:** هما مثلثان تتناسب اضلاعهما وتتطابق زواياهما ويرمز له بالرمز ( ~ ). سوف نأخذ على التشابه مبرهنات بدون برهان

**مبرهنة 5** اذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث اخر فأن المثلثين يتشابهان.




اذا $m\angle A = m\angle D$ , $m\angle C = m\angle F$ فأن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ او أي زاويتين آخرتين

**مبرهنة 6** اذا تناسب ثلاث اضلاع من مثلث مع ثلاث اضلاع من مثلث اخر فأن المثلثين متشابهين.




اضلاع المثلث الصغير

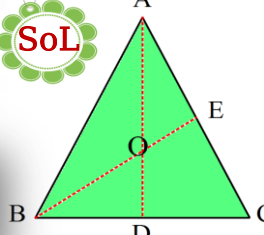
اذا $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ فأن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

اضلاع المثلث الكبير

**تنبيه:** يجب وضع كل اضلاع المثلث الصغير اما في البسط او في المقام ويعتبر التناسب خاطئ اذا وضعت ضلع في البسط في التناسب الأول وضلع في المقام في التناسب الثاني . ( يعني لو كلهن فوك لو كلهن جوه ميصير تطفر)

**مثال 5** $ABC$ مثلث ، $O$ نقطة تقاطع مستقيماته المتوسطه اذا كان $BO = 12cm$ ، جد طول القطعة التي طرفيها النقطة $B$

SoL




نرسم المثلث ونحدد عليه المستقيمات

بما انه $\overline{BO}$ ضلع معلوم من القطعة المتوسطة $\overline{BE}$

اذن من مبرهنة 3 نجد طول القطعة $\overline{BE}$

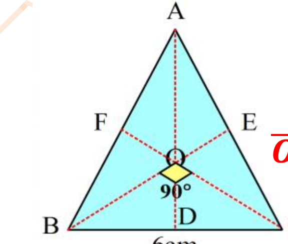
$\overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{BE} \Longrightarrow 12 = \frac{2}{3}\overline{BE}$

$\frac{12}{1} \;\; \frac{2}{3}\overline{BE}$ طرفين × وسطين

$\overline{BE} = \frac{12 \times 3}{2 \times 1} \Longrightarrow \overline{BE} = 18cm$

**مثال 6** $ABC$ مثلث ، $O$ نقطة التقاء القطع المتوسطه، جد طول $\overline{AD}$ اذا علمت ان $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$ ، $m\angle COB = 90°$ ، $BC = 6cm$

SoL




نرسم مثلث ونحدد علية المعطيات
لايجاد طول $\overline{AD}$ يجب ان نجد $\overline{OD}$
من خلال مبرهنة 4 المثلث القائم

$OD = \frac{1}{2}BC$

$OD = \frac{1}{2} \times 6 \Longrightarrow OD = 3cm$

ومن خلال مبرهنة3 ( الضلع الكَصير لـ $\overline{AD}$ )

$OD = \frac{1}{3}AD \Longrightarrow \frac{3}{1} \;\; \frac{1}{3}AD$

$AD = \frac{3 \times 3}{1} = 9cm$

**H.W**

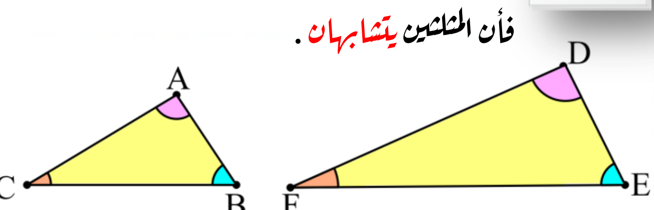
❶ المثلث $ABC$ فيه، $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في $O$
$AD = 9cm$ , $CE = 12cm$ ، جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$

❷ المثلث $ABC$ فيه، $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في $O$
$AD = 12cm$ , $CE = 24cm$ ، جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$

Ans: ❶ $AO = 6cm, OE = 4cm$ ❷ $AO = 8cm, OE = 8cm$

## مبرهنة 7

اذا تناسب ضلعان في مثلث مع نظائرها في مثلث اخر ، و تطابقت الزاوية المحصورة بينهما مع نظيرتها فأن المثلثين يتشابهان .




$\frac{AC}{DF} = \frac{CB}{FE}$ , $m\angle C = m\angle F$ فيكون $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

او أي ضلعين من المثلث الأول مع نظائرهما من المثلث الثاني والزاوية المحصورة بينهما

تذكير: أصبحت لدينا ثلاث مبرهنات لتشابه المثلثين .

الأولى تطابق زاويتين : نستخدمها عندما يكون في المثلثين قياس زاويتين

الثانية تناسب ثلاث اضلاع : نستخدمها عندما يكون في المثلثين ثلاث اضلاع معلومة

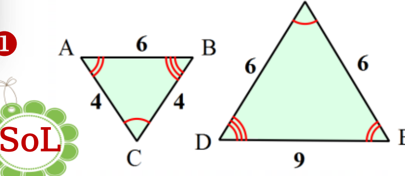
الثالثة تناسب ضلعين وزاوية محصورة بينهما : نستخدمها عندما يكون في المثلثين ضلعين وزاوية معلومين.

عندما يطلب منك اثبات تشابه مثلثين استخدم المبرهنة حسب معطيات السؤال

## مثال 7

بين فيما اذا كان المثلثين في الاشكال التالية متشابهين . واكتب نسبة التشابه

❶




SoL

لكي نثبت ان المثلثين متشابهين يجب ان نثبت ان الاضلاع في المثلثين متناسبة

$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\frac{AC}{FE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

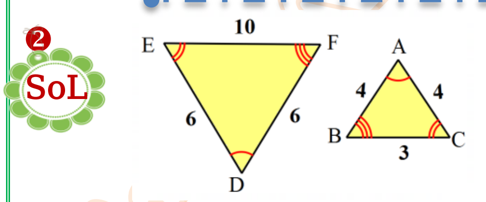
$\frac{BC}{FD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

بما انه $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{FE} = \frac{BC}{FD} = \frac{2}{3}$

اذن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

لان تناسب اضلاع المثلث الأول مع الثاني متساوية

❷




SoL

نجد تناسب الاضلاع

$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{10}$

$\frac{AB}{DF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\Longrightarrow \frac{BC}{EF} \neq \frac{AB}{DF}$

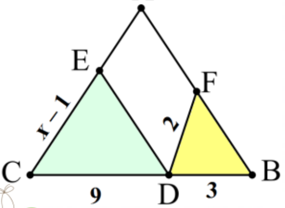
نتوقف عن التكملة لان نسبة الضلع الأول لا تساوي نسبة الضلع الثاني

اذن المثلثان غير متشابهان

## مثال 8

في الشكل المجاور اذا كان :

$\frac{EC}{DF} = \frac{CD}{DB}$ , $m\angle C = m\angle FDB$ جد قيمة $x$ ؟




SoL

من خلال المعطى $\frac{EC}{DF} = \frac{CD}{DB}$ , $m\angle C = m\angle FDB$

حسب مبرهنة 7 يكون $\Delta ECD \sim \Delta FDB$ متشابهين

$\frac{EC}{DF} = \frac{CD}{DB}$ فتكون اضلاعهما متناسبة

$\frac{x-1}{2} = \frac{9}{3} \Longrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{3}{1}$

$\frac{x-1}{2} = \frac{3}{1}$

$x - 1 = 3 \times 2$

$x = 6 + 1$

$x = 7$

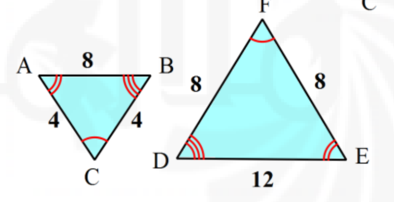
## H.W

بين هل ان المثلثان في الاشكال ادناه متشابهين. واكتب نسبة التشابه.

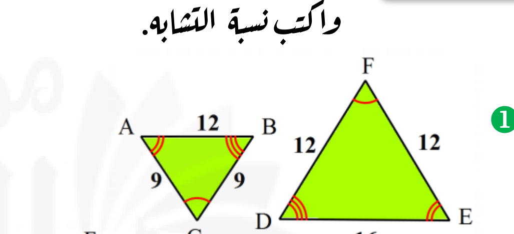
❶




❷

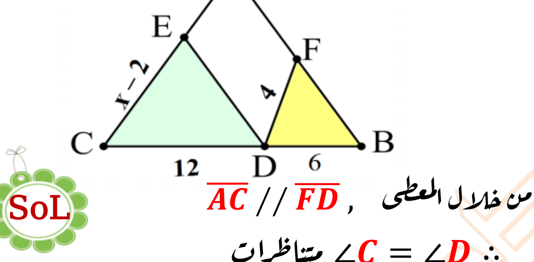



❸ ثم سم ازواج الزوايا المطابقة في هذه الشكل



**مثال 9**

بين ان $\Delta ABC , \Delta FBD$ في الشكل المجاور متشابهين حيث ان: $\overline{AC} // \overline{FD}$ ، وجد قيمة $x$ ؟




**SoL**

من خلال المعطى ، $\overline{AC} // \overline{FD}$

$\because \angle C = \angle D$ متناظرات

و $\angle B$ زاويه مشتركه

( حسب مبرهنة 5 ، تساوي زاويتين) اذن $\Delta ABC \sim \Delta FBD$ متشابهين

$\angle D$ متقابلة بالرأس و $\angle E = \angle D$ متبادلات

فيكون $\Delta ECD \sim \Delta FBD$ ( حسب مبرهنة 5 ، تساوي زاويتين)

فيكون اضلاعهما متناسبة $\dfrac{EC}{DF} = \dfrac{CD}{DB}$

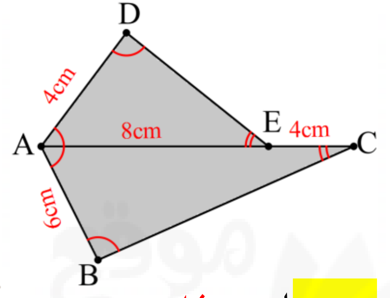
$\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{12}{6} \Longrightarrow \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{2}{1}$

$x - 2 = 4 \times 2$

$x = 8 + 2 \Rightarrow x = 10$

**مثال 10**

بين ان المثلثين $ABC$ , $ADE$ في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه




**SoL**



نثبت ان المثلثين متشابهين من خلال مبرهنة 7 لوجود ضلعين و زاوية

نجد تناسب الضلعين المعلومين من كل مثلث،

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{8}{8+4} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

$\Longrightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

والزاويتين المحصورتين بين الضلعين $m\angle DAE = m\angle CAB$ متساويتين

اذن $ABC \sim ADE$ حسب مبرهنة 7 ونسبة التشابه هي $\dfrac{2}{3}$

**مثال 11**

في الشكل المجاور:

❶ بين ان المثلثين $ABC , BDE$ متشابهين ❷ جد نسبة التشابه ❸ جد قيمة $x$

**SoL**

بما انه $\overline{AC} // \overline{DE}$ معطى من خلال الرسم (راس السهم يدل على التوازي)

$\begin{Bmatrix} m\angle A = m\angle E \\ m\angle D = m\angle C \end{Bmatrix}$ متبادلات

اذن $\Delta ABC , \Delta BDE$ متشابهين حسب مبرهنة 5 ، تساوي زاويتين

فيكون اضلاعهما متناسبة $\dfrac{EB}{AB} = \dfrac{DB}{BC}$

$\dfrac{x}{9} = \dfrac{8}{x-1} \Longrightarrow x(x-1) = 8 \times 9$

تحل بالتجربة $x^2 - x = 8 \times 9 \Longrightarrow x^2 - x - 72 = 0$

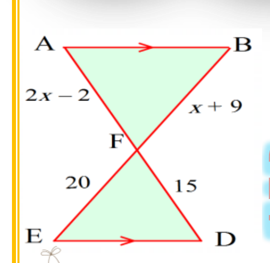
$(x-9)(x+8) = 0 \Rightarrow$

اما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

او $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$ يهمل

ونجد نسبة التشابه من أي ضلع $\dfrac{x}{9} = \dfrac{9}{9} = 1$









❶ **هندسة:** اذا علمت ان $\Delta ABF \sim \Delta EDF$ وان $\overline{AB} \,//\, \overline{ED}$ استعمل المعلومات في الشكل المجاور لتجد قيمة $x$ ؟

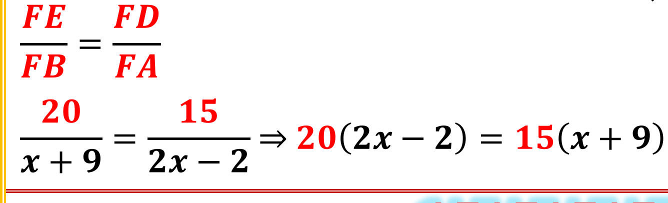
**SoL**

∵ $\Delta ABF \sim \Delta EDF$ متشابهين

∴ تتناسب اضلاعهما

$$\frac{FE}{FB} = \frac{FD}{FA}$$

$$\frac{20}{x+9} = \frac{15}{2x-2} \Rightarrow 20(2x-2) = 15(x+9)$$

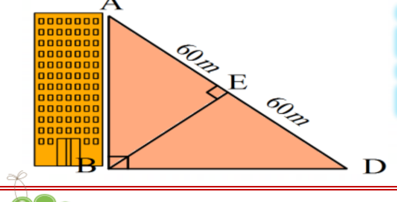


$$40x - 40 = 15x + 135$$

$$40x - 15x = 135 + 40$$

$$[25x = 175] \div 25$$

$$x = 7$$




❷ **بناية:** بناية ارتفاعها يمثل بضلع قائم الزاوية كما في الشكل المجاور و $BE$ هو ارتفاع للمثلث $ABD$

برهن: ❶ $m\angle EBA = m\angle D$ ❷ $\Delta ABE \sim \Delta BED$

**SoL**

في $\Delta ABE$ و $\Delta BED$

$m\overline{AE} = m\overline{ED} = 6cm$

$m\angle E + m\angle E = 90^\circ$

$\overline{BE} \cong \overline{BE}$

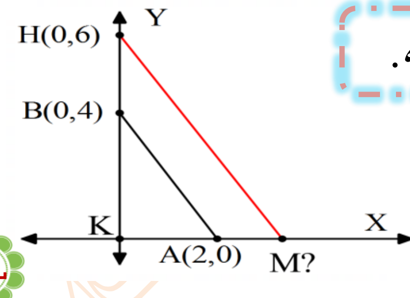
من خواص تطابق المثلثات: يتطابق المثلثان اذا تساوى ضلعين وزاوية محصوره بينهما

∴ $\Delta ABE \sim \Delta BED$

ومن خلال تطابق المثلثين $BED$ و $ABE$ يكون

$m\angle EBA = m\angle D$

❸ **احداثي:** في الشكل المجاور المثلثان $\Delta KAB \sim \Delta KMH$ متشابهان ، جد احداثي $M$ ونسبة التشابه.




**SoL**

∵ $\Delta KAB \sim \Delta KMH$ فتكون اضلاعهما متناسبان

$$\frac{KH}{KB} = \frac{KM}{KA}$$

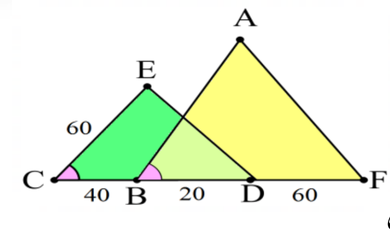
$$\frac{6}{4} = \frac{M}{2} \Longrightarrow \frac{3}{2} = \frac{M}{2}$$

$$2M = 2 \times 3 \Longrightarrow M = 3$$

فيكون احداثي $M$ هو $M(3,0)$ لأنها على محور السينات \ ونسبة التشابه هي $\frac{M}{2} = \frac{3}{2}$

## فَكِرّ

### اولاً اكتشف




SoL

ما طول $\overline{AB}$ في الرسم المجاور ؟ علماً ان $\Delta ECD \sim \Delta ABF$

$\because \Delta ECD \sim \Delta ABF$ فتكون اضلاعهما متناسبان

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BF}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{60} = \frac{80}{60} \Longrightarrow 60AB = 60 \times 80 \Longrightarrow AB = 80$$

### ثانياً تحدِ

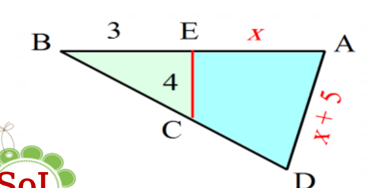
SoL

$(10, 5, 2)$ و $(x, 15, 6)$ هي اطوال اضلاع متناظره في مثلثين متشابهين ، ما قيمة $x$ ؟

$\because$ المثلثين متشابهين فيكون اضلاعهما متناسبة فناخذ أي ضلعين من ضمنها الضلع الذي يحتوي $x$ و نجد التناسب لهما

$$\frac{x}{10} = \frac{15}{5} \Longrightarrow 5x = 10 \times 15 \Longrightarrow x = 30$$

### ثالثاً حس عددي




SoL

جد قيمة $x$ في الشكل المجاور . اذا كان المثلثان $ABD, BEC$ متشابهان وان $\overline{EC} // \overline{AD}$

$\because \Delta ABD \sim \Delta BEC$ فتكون اضلاعهما متناسبان

$$\frac{BE}{BA} = \frac{EC}{AD} \Rightarrow \frac{3}{3+x} = \frac{4}{x+5} \Longrightarrow 4(3+x) = 3(x+5)$$

$$12 + 4x = 3x + 15 \Longrightarrow 4x - 3x = 15 - 12 \Longrightarrow x = 3$$

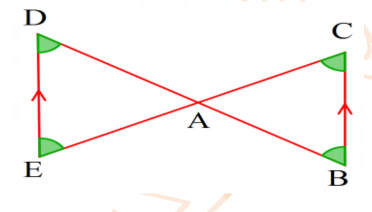
### رابعاً مسألة مفتوحه

SoL

اشرح لماذا تحتاج قياسات الزوايا للتاكد من تشابه المثلثات ، اعط مثال على ذلك ؟

من خواص تشابة المثلثات هي

1. عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث اخر فأن المثلثين يتشابهان
2. عند تناسب ضلعين في مثلث مع نظائرهما في مثلث اخر وتطابقت الزاوية المحصورة بينهما مع نظيرتها فأن المثلثين متشابهين



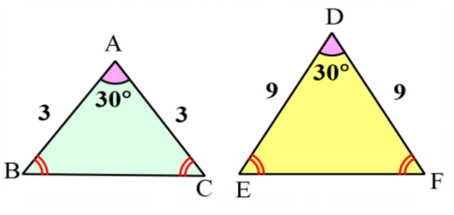

مثال \ هل المثلثان في الشكل المجاور متشابهان ؟ وبين السبب ؟

الحل \ بما انه $\overline{BC} // \overline{ED}$ ، نجد ان هناك زاويتين من المثلث $ABC$ يطابقان مع زاويتين من المثلث $ADE$ (زوايا متبادلة) اذن المثلثان متشابهان

### خامساً أكتب

SoL

مسألة عن مثلثين متساويي الساقين يطابق فيهما زاويتا الرأس . وجد نسبة التشابه ؟




نسبة التشابه $\frac{9}{3} = \frac{3}{1}$

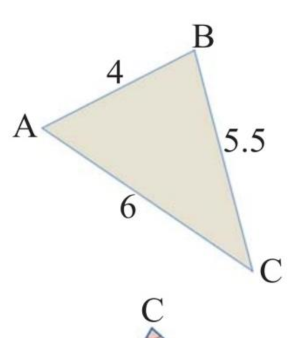
يجب ان يكون طول الضلع الثالث اصغر من 18 و 6 لان مجموع اي ضلعين في المثلث اكبر من الضلع الثالث.

## Multiple Choice    الاختيارُ من متعدد

### الدرس [5-2] المثلثات

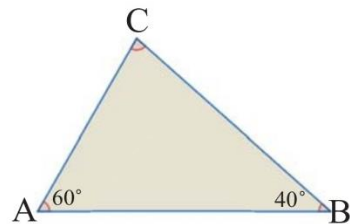
### Triangles

**اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:**



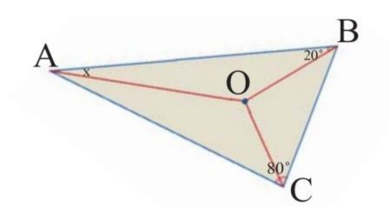

1 رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر في المثلث المجاور:

a. $m\angle C, m\angle A, m\angle B$ ✓
b. $m\angle A, m\angle B, m\angle C$
c. $m\angle B, m\angle C, m\angle A$
d. $m\angle C, m\angle B, m\angle A$




2 رتب الاضلاع من الاطول الى الاقصر في المثلث المجاور:

a. $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$
b. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ ✓
c. $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$
d. $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$




3 اذا كانت O هي نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC في الشكل المجاور فان قيمة x هي:

a) 20°    b) 40°    c) 30° ✓    d) 50°

4 المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O، AD=36cm, CE=24cm، فان قيمة $\overline{OE}$ ، علماً ان رأس المثلث هو النقطة B هي:

a) 8 cm ✓    b) 24 cm    c) 16 cm    d) 12 cm

5 في السؤال (4) قيمة $\overline{AO}$ هي:

a) 6 cm    b) 12 cm    c) 24 cm ✓    d) 14 cm

6 نسبة التشابه بين المثلثين ADB,ABC هي:

a. $\frac{8}{7}$ ✓    b. $\frac{7}{8}$
c. 7    d. 8

7 اذا كانت المثلثان DBE,ABC متشابهان وكانت الزاويتان.
$m\angle ABC \cong m\angle DEB$
فأن قيمة x هي:

a) 8    b) 12    c) 10 ✓    d) 6

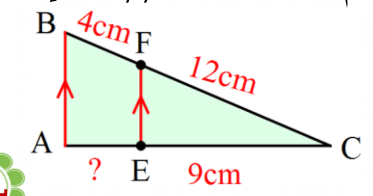
# الدرس (5 – 3) التناسب والقياس في المثلثات

سوف نقسم هذه الدرس الى ثلاث اقسام الأول التناسب في المثلثات و الثاني التناسب والقياس و الثالث التناسب الهندسي احداثياً .

## اولاً التناسب في المثلثات

تعلمت سابقاً التشابه في المثلثات وبعض مبرهنات التشابه. سوف نتعلم في هذه البند التناسب في المثلثات

### مبرهنة 8

| مبرهنة التناسب المثلثي | | |
|---|---|---|
| نص المبرهنة | المعطى | النتيجة |
| اذا وازى مستقيم ضلعاً من اضلاع مثلث وقطع الضلعين الاخرين في نقطتين مختلفتين فإنه يقسم الضلعين الى قطع متناسبة الاطوال (بدون برهان) | $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$  | $\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$ |

### مثال 1

جد طول قطعة المستقيم $AE$ علماً ان $\overleftrightarrow{EF} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$ في الشكل ادناه

SoL

بما انه المعطى هو $\overleftrightarrow{EF} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$ اذن حسب مبرهنة التناسب المثلثي

(التناسب في كل مستقيم هو الرقم الصغير على الكبير او الكبير على الصغير)

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AE}{EC} \Longrightarrow \frac{4}{12} = \frac{AE}{9}$$

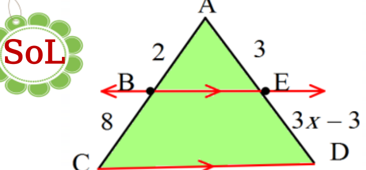
$$\frac{1}{3} = \frac{AE}{9} \Longrightarrow 3AE = 1 \times 9 \Longrightarrow AE = \frac{9}{3}$$

$AE = 3cm$

### مثال 2

في المثلث $ACD$، $\overline{CD} \,//\, \overline{BE}$ جد قيمة $x$ و $ED$ اذا كان $AE = 3, BC = 8, ED = 3x - 3$

SoL



نرسم المثلث ونحدد علية المعطيات

بما انه المعطى هو $\overline{CD} \,//\, \overline{BE}$،

اذن حسب مبرهنة التناسب المثلثي

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED} \Longrightarrow \frac{2}{8} = \frac{3}{3x - 3}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{3x-3}$$

$3x - 3 = 3 \times 4 \Longrightarrow 3x = 12 + 3$

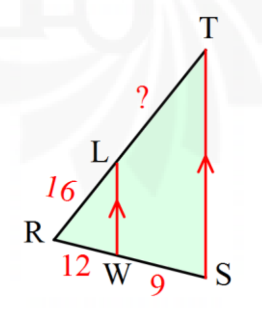
$3x = 15 \Longrightarrow x = 5$

$\therefore ED = 3x - 3 = 3 \times 5 - 3 \Rightarrow ED = 12$

### H.W

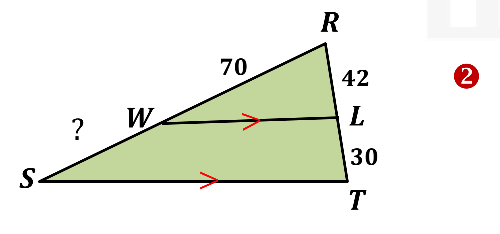
جد طول القطعة المستقيمة المجهولة في الاشكال التالية :

❶



Ans: $LT = 12$

❷



Ans: $WS = 50$

تنبيه: رأس السهم الأحمر في الرسم يدل على التوازي

## مبرهنة 9

### عكس مبرهنة التناسب المثلثي

| نص المبرهنة | المعطى | النتيجة |
| --- | --- | --- |
| اذا قسم مستقيم ضلعين في مثلث الى قطع متناسبة فإنه يكون موازياً للضلع الثالث. (بدون برهان) | $\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$ | $\overline{AB} // \overleftrightarrow{FE}$ |




انتباه: الفرق بين مبرهنة التناسب المثلثي و عكس مبرهنة التناسب المثلثي

- في مبرهنة التناسب المعطى هو التوازي و المطلوب هو طول احد القطع المجهولة.
- في مبرهنة عكس التناسب المعطى هو طول كل القطع والمطلوب هو اثبات التوازي.




### مثال 3

في الشكل المجاور برهن $\overline{MK} // \overline{NJ}$

SoL

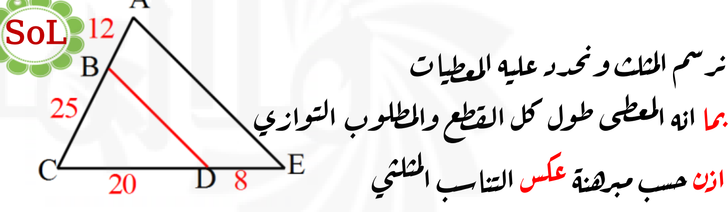
بما انه المعطى طول كل القطع والمطلوب التوازي
ازن حسب مبرهنة عكس التناسب المثلثي
(نجد التناسب في كل ضلع لكي نحقق مبرهنة عكس التناسب المثلثي)

$\frac{HN}{NM} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$

$\frac{HJ}{JK} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$

$\because \frac{HN}{NM} = \frac{HJ}{JK} = \frac{7}{3}$ (حسب عكس مبرهنة التناسب المثلثي)

$\therefore \overline{MK} // \overline{NJ}$



### مثال 4

في المثلث $ACE$، $BC = 25$، $DC = 20$، $ED = 8$، $AB = 12$ حدد اذا كان $\overline{AE} // \overline{BD}$ او لا؟ برر اجابتك

SoL

نرسم المثلث و نحدد عليه المعطيات
بما انه المعطى طول كل القطع والمطلوب التوازي
ازن حسب مبرهنة عكس التناسب المثلثي
(نجد التناسب في كل ضلع لكي نحقق مبرهنة عكس التناسب المثلثي)

$\frac{CB}{BA} = \frac{25}{12}$

$\frac{CD}{DE} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$

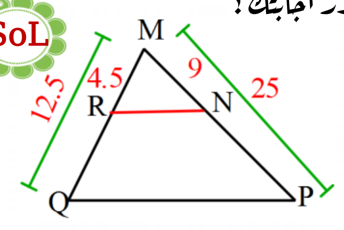
$\because \frac{CB}{BA} \neq \frac{CD}{DE}$

(حسب عكس مبرهنة التناسب المثلثي) ازن القطعتان غير متوازيتان

### مثال 5

في المثلث $MQP$، $MN = 9$، $MP = 25$، $MR = 4.5$، $MQ = 12.5$ حيث $N \in \overline{MP}$، $R \in \overline{MQ}$ هل ان: $\overline{RN} // \overline{QP}$ او لا؟ برر اجابتك؟

SoL



نرسم المثلث ثم نجد اطوال القطع

$NP = 25 - 9 = 16$

$RQ = 12.5 - 4.5 = 8$

ازن حسب مبرهنة عكس التناسب المثلثي

$\frac{MR}{RQ} = \frac{4.5}{8}$

$\frac{MN}{NP} = \frac{9}{16} = \frac{4.5}{8}$

(او بطريقة أخرى غير قسمة التناسب الثاني على 2 هي نضرب التناسب الأول في 2)

$\frac{4.5 \times 2}{8 \times 2} = \frac{9}{16}$

$\because \frac{MR}{RQ} = \frac{MN}{NP} = \frac{4.5}{8}$

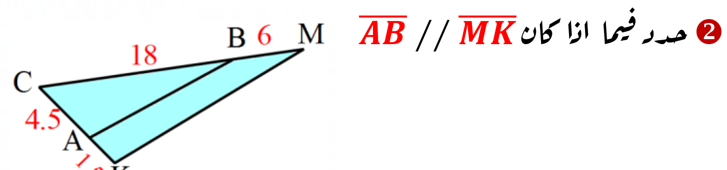
$\therefore \overline{RN} // \overline{QP}$ (حسب عكس مبرهنة التناسب المثلثي)




❶ استعمل الشكل المجاور وبين ما اذا كان $\overline{AE} // \overline{BD}$

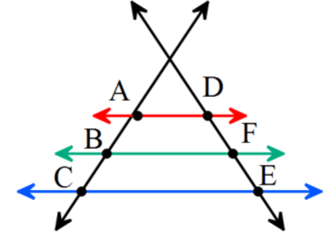


❷ حدد فيما اذا كان $\overline{AB} // \overline{MK}$



## مبرهنة 10

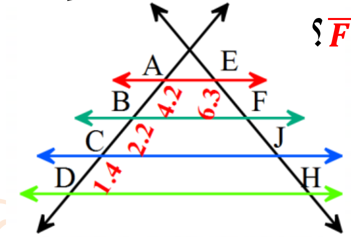
**مبرهنة طالس**

| نص المبرهنة | المعطى | النتيجة |
|---|---|---|
| اذا قُطعت ثلاث مستقيمات متوازية او اكثر بمستقيمين فإن القطع المحددة بالمستقيمات المتوازية تكون متناسبة (بدون برهان) |  $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BF} \,//\, \overleftrightarrow{CE}$ | $\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{FE}$ |

**الرسم المنظوري:** هو رسم الاجسام البعيدة بحيث تبدو اصغر والاجسام القريبة حيث تبدو اكبر، مع الحفاظ على هيئتها وتناسب مقاييسها لتبدو ثلاثية الابعاد

### مثال 6

استعمل مهندس الرسم المنظوري ليرسم خطوطاً أولية تساعده على رسم أعمدة اتصالات متوازية، تحقق من رسمه بقياس المسافات بين الأعمدة، كم طول $\overline{FH}$ ؟




**SoL**

**ملاحظة:** اذا كان في السؤال اكثر من ثلاث مستقيمات فيكون التناسب بين اول قطعة و ثاني قطعة، وثاني قطعة و اخير قطعة. وما بينهما يتم جمعه معهما

$\because \overleftrightarrow{AE} \,//\, \overleftrightarrow{BF} \,//\, \overleftrightarrow{CJ} \,//\, \overleftrightarrow{DH}$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{EF}{FH}$ (حسب مبرهنة طالس)

$BD = BC + CD = 2.2 + 1.4 = 3.6$

$\frac{4.2}{3.6} = \frac{6.3}{FH}$

$FH = \frac{3.6 \times 6.3}{4.2}$

$FH = 5.4m$

### مثال 7

في الرسم المجاور جد طول $\overline{MN}, \overline{KN}$

**SoL**

$\because \overleftrightarrow{MA} \,//\, \overleftrightarrow{NB} \,//\, \overleftrightarrow{KC}$

$\therefore \frac{MN}{NK} = \frac{AB}{BC}$ (حسب مبرهنة طالس)

$\frac{x}{x+4} = \frac{\frac{x}{2}}{x-4}$

$\left[\frac{x}{2}(x+4) = x(x-4)\right] \times 2$ (نضرب المعادلة في 2 لنتخلص من الكسر)

$x(x+4) = 2x(x-4) \Rightarrow x^2 + 4x = 2x^2 - 8x$

$2x^2 - x^2 - 8x - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - 12x = 0$

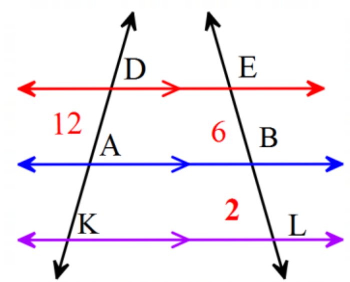
$x(x-12) = 0 \Rightarrow$ اما $x = 0$ تهمل

او $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

$\therefore MN = x = 12 \,,\, KN = x + 4 = 12 + 4 = 16$

### H.W

جد طول القطعة $\overline{AK}$ في الشكل المجاور اذا علمت ان: $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{KL}$



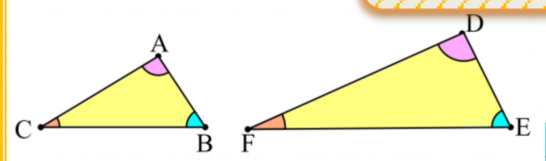

$Ans: \overline{AK} = 4$



## ثانياً التناسب والقياس في المثلثات

:لإيجاد نسبة محيطين و نسبة مساحتين لمثلثان متشابهان يمكننا استعمال المبرهنة التالية

**مبرهنة 11** اذا تشابه مثلثان بنسبة تشابه $\frac{a}{b}$ فإن نسبة المحيطين للمثلثين تساوي $\frac{a}{b}$ ونسبة المساحتين $\frac{a^2}{b^2}$.



**ترجمة المبرهنة:** اذا كانت نسبة تشابه المثلثين $\Delta ABC, \Delta DFE$ هي $\frac{AC}{DF} = \frac{a}{b}$

فيكون نسبة محيطيهما هو $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta DFE}} = \frac{AC}{DF} = \frac{a}{b}$ ونسبة مساحتيهما هي $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DFE}} = \frac{(AC)^2}{(DF)^2} = \frac{a^2}{b^2}$

### مثال 8

ليكن $\Delta ABC \sim \Delta WVT$ جد محيط $\Delta ABC$




**SoL** نجد محيط المثلث $\Delta WVT$: $P_{\Delta WVT} = 5 + 8 + 4 = 17cm$

$\because \Delta WVT \sim \Delta ABC$

$\therefore \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta WVT}} = \frac{AB}{VW}$ (حسب مبرهنة 11)

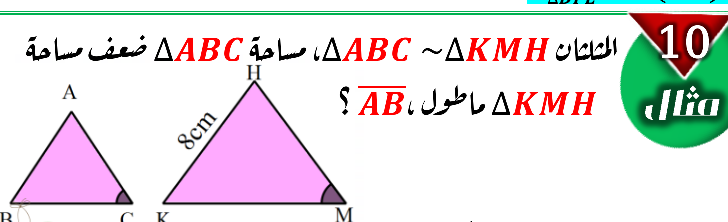
انتباه: أخذنا هذه النسبة $\frac{AB}{VW}$ لان الضلع $AB$ معلوم ونظيره $VW$ في المثلث الآخر أيضا معلوم

$\frac{P_{\Delta ABC}}{17} = \frac{5}{8} \Longrightarrow 8P_{\Delta ABC} = 5 \times 17$

$P_{\Delta ABC} = \frac{85}{8} \Longrightarrow P_{\Delta ABC} = 10.6cm$

### مثال 10

المثلثان $\Delta ABC \sim \Delta KMH$، مساحة $\Delta ABC$ ضعف مساحة $\Delta KMH$ ، ماطول $\overline{AB}$ ؟



**SoL** نفرض، $A_{\Delta KMH} = x$ فيكون ضعفها، $A_{\Delta ABC} = 2x$

$\because \Delta ABC \sim \Delta KMH$

$\therefore \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta KMH}} = \frac{(AB)^2}{(HK)^2}$ (حسب مبرهنة 11)

$\frac{2x}{x} = \frac{(AB)^2}{(8)^2} \Longrightarrow \frac{2}{1} = \frac{(AB)^2}{64}$

$(AB)^2 = 2 \times 64$ (بالجذر التربيعي للطرفين)

$AB = \sqrt{2} \times 8 \Longrightarrow AB = 8\sqrt{2}cm$

### مثال 9

المثلثان $\Delta ABC \sim \Delta KMH$، جد مساحة ومحيط $\Delta ABC$، علماً أن محيط $\Delta KMH$ يساوي $18cm$ ومساحته $15cm^2$



**SoL** $\because \Delta ABC \sim \Delta KMH$

$\therefore \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KMH}} = \frac{BC}{MH}$ (حسب مبرهنة 11)

$\therefore \frac{P_{\Delta ABC}}{18} = \frac{8}{6} \Longrightarrow P_{\Delta ABC} = \frac{8 \times 18}{6} \Longrightarrow P_{\Delta ABC} = 24cm$

$\therefore \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta KMH}} = \frac{(BC)^2}{(MH)^2}$ (حسب مبرهنة 11)

$\frac{A_{\Delta ABC}}{15} = \frac{(8)^2}{(6)^2} \Longrightarrow \frac{A_{\Delta ABC}}{15} = \frac{64}{36}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{64 \times 15}{36} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = 26.6cm^2$

### مثال 11

نسبة مساحة المثلث $ABC$ الى نسبة مساحة المثلث $KMH$ تساوي $\frac{16}{25}$ مانسبة تشابه المثلثين وما نسبة التشابه بين محيطيهما ؟

**SoL** $\because \Delta ABC \sim \Delta KMH$

$\therefore \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta KMH}} = \frac{a^2}{b^2}$ (حسب مبرهنة 11)

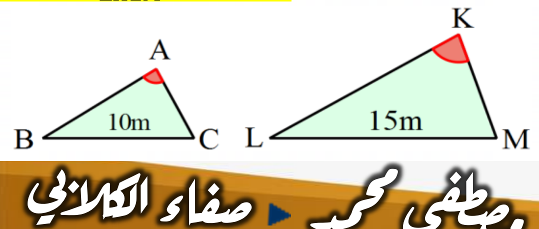
$\frac{16}{25} = \frac{a^2}{b^2}$ بالجذر التربيعي للطرفين $\Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ تمثل نسبة التشابه بين المثلثين

$\therefore \frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KMH}} = \frac{a}{b}$ (حسب مبرهنة 11)

$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KMH}} = \frac{4}{5}$ تمثل نسبة التشابه بين المحيطين

**H.W** $\Delta ABC \sim \Delta KLM$، مساحة $A_{\Delta ABC} = 24m^2$، ما مساحة المثلث $\Delta KLM$

$Ans: A_{\Delta KLM} = 54m^2$



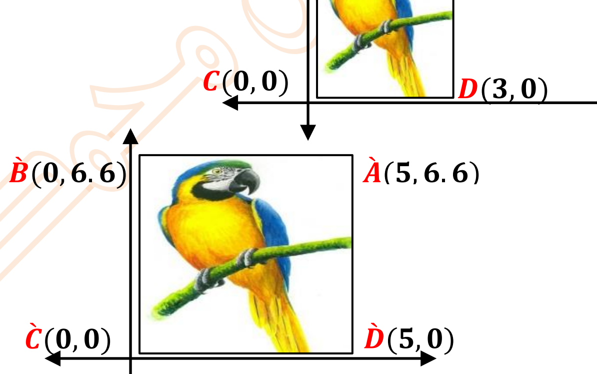
تعلمنا سابقاً ثلاث تحويلات هندسيه، الانسحاب ، الانعكاس ، الدوران وهذه التحويلات تحافظ على الهيئة والقياسات .
سوف نتعلم في هذه البند تحويلاً جديداً يحافظ على الهيئة دون حفظ القياسات وهو التناسب الهندسي .

## ثالثاً التناسب الهندسي إحداثياً

هو تحويلاً يغير مقاييس الأشكال الهندسية دون تغيير هيئتها فالشكل وصورته بالتناسب الهندسي يكونان دائماً متشابهين، مركز التناسب هو نقطة الأصل.
سنقتصر دراسة التناسب الهندسي في هذا الدرس على المستوى الاحداثي، اذا تعاملت مع تناسب هندسي معامله الهندسي $M$ فسوف يكون بإمكانك أن تجد صورة النقطة بضرب إحداثياتها في $M$ . $P(x,y) \xrightarrow{\text{تناسب هندسي}} \grave{P}(xM, yM)$

**مثال 12**

يبين الرسم المجاور موقع صورة على شبكة الأنترنيت، ارسم حدود الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{5}{3}$.




**SoL** $A(3,4), B(0,4), C(0,0), D(3,0), M=\frac{5}{3}$

نطبق القانون على نقاط الرسم $P(x,y) \xrightarrow{\text{تناسب هندسي}} \grave{P}(xM, yM)$

$A(3,4) \to \grave{A}\left(3\times\frac{5}{3}, 4\times\frac{5}{3}\right) \to \grave{A}\left(\frac{15}{3},\frac{20}{3}\right) \to \grave{A}(5,6.6)$

$B(0,4) \to \grave{B}\left(0\times\frac{5}{3}, 4\times\frac{5}{3}\right) \to \grave{B}\left(\frac{0}{3},\frac{20}{3}\right) \to \grave{B}(0,6.6)$

$C(0,0) \to \grave{C}\left(0\times\frac{5}{3}, 0\times\frac{5}{3}\right) \to \grave{C}\left(\frac{0}{3},\frac{0}{3}\right) \to \grave{C}(0,0)$

$D(3,0) \to \grave{D}\left(3\times\frac{5}{3}, 0\times\frac{5}{3}\right) \to \grave{D}\left(\frac{15}{3},\frac{0}{3}\right) \to \grave{D}(5,0)$

ثم نرسم الرسم بعد إيجاد النقاط $\grave{A}, \grave{B}, \grave{C}, \grave{D}$ بعد أجراء التناسب عليها بمقدار $M=\frac{5}{3}$

لا تُخدع هذا هو معامل التناسب $M$

**H.W**

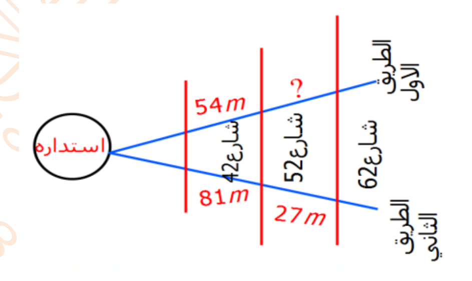
❶ مثلث $ABC$ حيث $A(6,0), B\left(-3,\frac{3}{2}\right), C(3,-6)$، جد صورته بعد تصغيره بمعامل $\frac{1}{3}$ علما أن مركز التناسب هو نقطة الأصل.

❷ جد صورة المثلث $ABC$ حيث: $A(-1,-1), B(1,-2), C(1,2)$، تحت تأثير تناسب معامله $2$ .

تذكير: في هذه الأسئلة الرسم غير معطى. فتقوم برسم الأشكال قبل أجراء التناسب وبعد أجراء التناسب عليها




❶ طرق: تمثل الخريطة المجاورة بعض الشوارع المتوازية وطريقين عبرها ما طول الطريق الأول بين الشارع 62 و الشارع 52؟



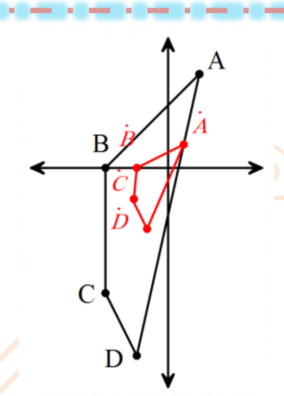

**SoL** بما انه المستقيمات متوازي اذن حسب مبرهنة التناسب المثلثي نستبدل علامة السؤال بالحرف $x=?$

$\frac{81}{27}=\frac{54}{x} \Longrightarrow \frac{^{3}81}{27}=\frac{54}{x} \Longrightarrow x=\frac{54}{3} \Longrightarrow x = 18m$



❷ هندسة: جد صورة الشكل الرباعي حيث: $A(2,6), B(-4,0), C(-4,-8), D(-2,-12)$ تحت تأثير تناسب معامله $\frac{1}{4}$.

SoL




نطبق القانون على النقاط $P(x,y) \xrightarrow{\text{تناسب هندسي}} \grave{P}(xM, yM)$

$A(2,6) \to \grave{A}\left(2 \times \frac{1}{4}, 6 \times \frac{1}{4}\right) \to \grave{A}\left(\frac{2}{4}, \frac{6}{4}\right) \to \grave{A}(0.5, 1.5)$

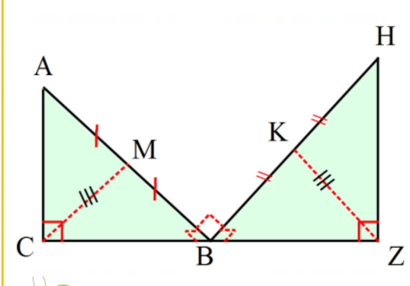
$B(-4,0) \to \grave{B}\left(-4 \times \frac{1}{4}, 0 \times \frac{1}{4}\right) \to \grave{B}\left(\frac{-4}{4}, \frac{0}{4}\right) \to \grave{B}(-1,0)$

$C(-4,-8) \to \grave{C}\left(-4 \times \frac{1}{4}, -8 \times \frac{1}{4}\right) \to \grave{C}\left(\frac{-4}{4}, \frac{-8}{4}\right) \to \grave{C}(-1,-2)$

$D(-2,-12) \to \grave{D}\left(-2 \times \frac{1}{4}, -12 \times \frac{1}{4}\right) \to \grave{D}\left(\frac{-2}{4}, \frac{-12}{4}\right) \to \grave{D}(-0.5,-3)$

فَكِّر

## اولاً تحدٍ




في الرسم المجاور، $M$ منتصف $AB$ و $K$ منتصف $\overline{AB}$، الزوايا: $\angle Z, \angle ABH, \angle C$ قائمة، برهن أن $\left(\frac{KZ}{CM}\right)^2 = \frac{(BZ)^2 + (ZH)^2}{(BC)^2 + (CA)^2}$

SoL

المثلث $ABC$ القائم الزاوية في $\angle C$ حسب نظرية فيثاغورس يكون

$(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$ ، $CM = \frac{1}{2}AB$ حسب مبرهنة 4

المثلث $HZB$ القائم الزاوية في $\angle Z$ حسب نظرية فيثاغورس يكون

$(HB)^2 = (BZ)^2 + (ZH)^2$ ، $KZ = \frac{1}{2}HB$ حسب مبرهنة 4

الطرف الاول $\left(\frac{KZ}{CM}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}HB}{\frac{1}{2}AB}\right)^2 = \left(\frac{HB}{AB}\right)^2$ ، الطرف الثاني $\frac{(BZ)^2+(ZH)^2}{(BC)^2+(CA)^2} = \frac{(HB)^2}{(AB)^2} = \left(\frac{HB}{AB}\right)^2$

$\therefore \left(\frac{KZ}{CM}\right)^2 = \frac{(BZ)^2+(ZH)^2}{(BC)^2+(CA)^2}$

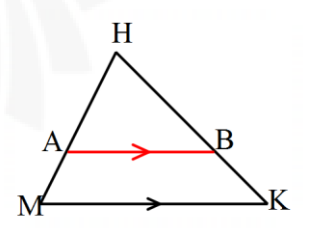
## ثانياً اكتب

ما تستطيع من تناسبات اذا علمت أن $\overline{MK} // \overline{AB}$ في مثلث $HKM$





SoL




مبرهنة التناسب المثلثي

$\because \overline{MK} // \overline{AB} \Longrightarrow \therefore \frac{HA}{AM} = \frac{HB}{BK}$

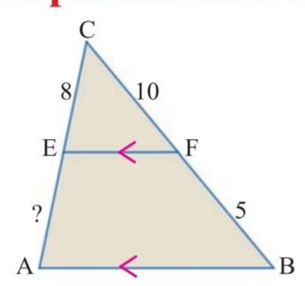
$\frac{HA}{HM} = \frac{HB}{HK}$

$\frac{HM}{AM} = \frac{HK}{HB}$

## الدرس [5-3] التناسب والقياس في المثلثات

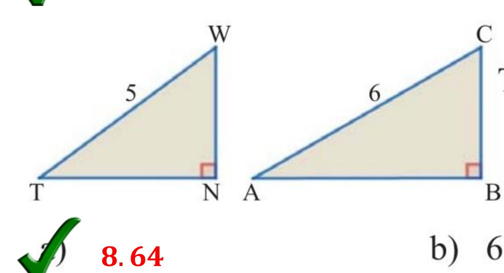
## Proportion and Measure in Triangles

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:




1 اذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ فأن طول القطعة المستقيمة AE هو:

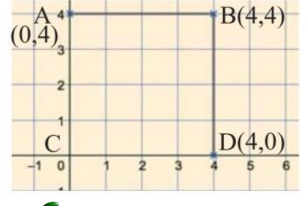
a) 4 ✓ b) 5 c) 2 d) 10




2 اذا كان $\triangle ABC \sim \triangle TWN$ ، اذا علمت ان ارتفاع المثلث TWN هو (3)، فأن مساحة المثلث ABC هي:

a) **8.64** ✓ b) 6 c) 7 d) 8

**تم رسم الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{4}{3}$ فتكون كما في الرسم المجاور:**




### اختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (4-7):

3 احداثيات النقطة A قبل التحويل هي:

a) (0,3) ✓ b) (3,0) c) (3,3) d) (0,0)

4 احداثيات النقطة B قبل التحويل هي:

a) (0,3) b) (3,0) c) (3,3) ✓ d) (0,0)

5 احداثيات النقطة C قبل التحويل هي:

a) (0,3) b) (3,0) c) (3,3) d) (0,0) ✓

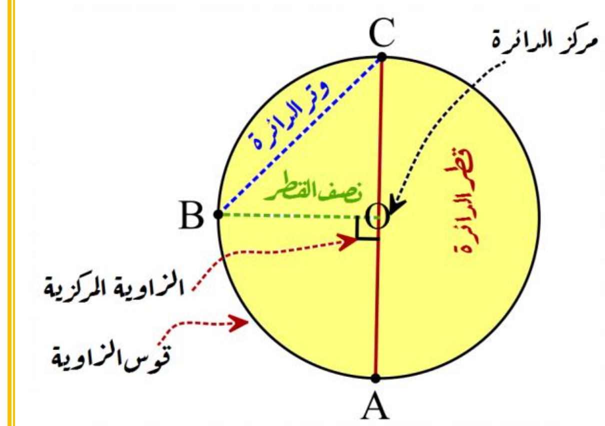
6 احداثيات النقطة D قبل التحويل هي:

a) (0,3) b) (3,0) ✓ c) (3,3) d) (0,0)

# الدرس (4 – 5) الـــدائرة

**الدائرة:** هي مجموعة من النقاط المتصلة في المستوي والتي لها البعد نفسه عن نقطة ثابتة تسمى مركز الدائرة $O$ و مجموع زواياها $360°$.

سوف نقسم هذه الدرس إلى قسمين الأول القوس والدائرة و الثاني المماس




## اولاً القوس و الدائرة

**نصف القطر $r$:** هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطةً ما على قوس الدائرة .

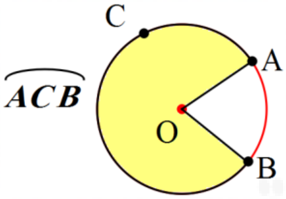
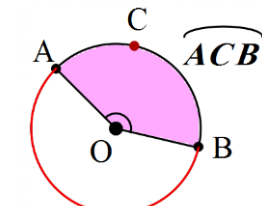
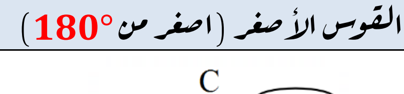
**وتر الدائرة :** هو قطعة مستقيمة طرفاها على الدائرة دون أن تمر بمركز الدائرة .

**قطر الدائرة:** هو وتر يمر مركز الدائرة .

**الزاوية المركزية :** هي الزاوية التي تقطع الدائرة في نقطتين ورأسها في مركز الدائرة وكل زاوية مركزية في دائرة يقابلها قوس على الدائرة يسمى **قوس الزاوية** . كل زاوية بين عقربي ساعة هي زاوية مركزية

➜ قياس الزاوية المركزية يكافئ قياس القوس المقابل لها ويرمز للقوس بالرمز $\widehat{AB}$ ويقاس بالدرجة القوسية $m\angle AOB = \widehat{AB}$

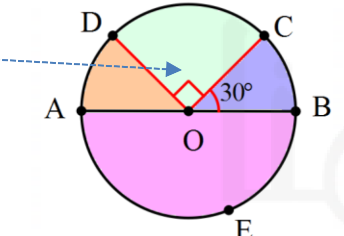
وهناك ثلاث أنواع من الأقواس

| قياس نصف الدائرة (يساوي $180°$) | القوس الأكبر (اكبر من $180°$) | القوس الأصغر (اصغر من $180°$) |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $m\widehat{AB} = 180$ | $m\widehat{ACB} = 360 - m\widehat{AB} > 180$ | $m\widehat{ACB} = m\angle AOB < 180$ |



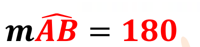

جد قياس الزوايا والأقواس المجهولة للشكل المجاور

❶ $\widehat{BC}$ ❷ $\widehat{DC}$ ❸ $\widehat{BCD}$ ❹ $\widehat{BEA}$ ❺ $\widehat{AD}$




القوس المربع على الزاوية يدل على أن الزاوية قائمة ويكون قياسها $90°$

ملاحظة: لإيجاد قياس أي قوس يجب أن نجد قياس زاويته أولا ويكون قياسه مساوي لقياس الزاوية المقابلة له




نجد قياس زاويته

❶ $\widehat{BC}: m\angle COB = 30° \Longrightarrow \therefore m\widehat{BC} = 30$

❷ $\widehat{DC}: m\angle COD = 90° \Longrightarrow \therefore m\widehat{DC} = 90$

❸ $\widehat{BCD}: m\angle COB + m\angle COD = 30° + 90° = 120° \Longrightarrow \therefore m\widehat{BCD} = 120$

❹ $\widehat{BEA}: m\angle BOA = 180° \Longrightarrow \therefore m\widehat{BEA} = 180$ (لأنها نصف دائرة)

❺ $\widehat{AD}: m\angle AOD = 180° - (m\angle COD + m\angle COB) \Longrightarrow m\angle AOD = 180° - (90° + 30°)$

$m\angle AOD = 180° - 120° = 60° \Longrightarrow \therefore m\widehat{AD} = 60$

## مثال 2

جد قياس الزوايا والأقواس فيما يلي:

❶ $\angle COA$ ❷ $\widehat{DBE}$ ❸ $\widehat{BAC}$ ❹ $\widehat{DCA}$

SoL

(لأنها نصف دائرة)

❶ $m\angle COA = 180° - (74° + 40°)$

$m\angle COA = 180° - 114° = 66°$

❷ $\widehat{DBE}: m\widehat{DB} + m\widehat{BE} = 180 + 90 = 270$

$\therefore m\widehat{DBE} = 270$

❸ $\widehat{BAC}: m\angle BOA + m\angle COA = 40° + 66° = 106°$

$\therefore m\widehat{BAC} = 106$

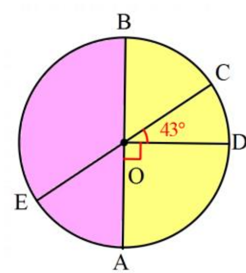
❹ $\widehat{DCA}: m\angle DOC + m\angle COA = 74° + 66° = 140°$

$\therefore m\widehat{DCA} = 140$

## H.W

في الدوائر ادناه جد قياس الزوايا والاقواس فيما يلي:

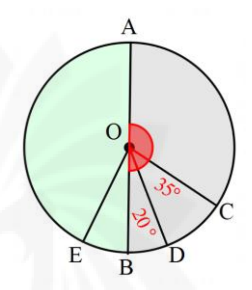
❶




① $m\angle AOD$ ② $m\angle COB$
③ $m\widehat{DBE}$ ④ $m\widehat{DAB}$

Ans: ① 90°, ②47°, ③223, ④270

❷




① $m\angle AOC$ ② $m\widehat{DC}$ ③ $m\widehat{DB}$
④ $m\angle DOA$

Ans: ① 125°, ②35, ③20, ④160°

## مثال 3

الدائرة أدناه مقسمة الى ثلاث أجزاء متطابقة جد قياس الأقواس التالية $\widehat{ABC}, \widehat{AB}$

SoL

مجموع الزوايا المركزية في الدائرة $\frac{360°}{3} = 120°$ لكل زاوية

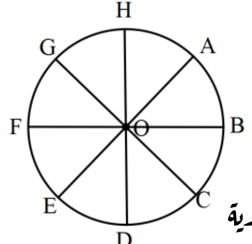
$\widehat{ABC}: m\angle AOB + m\angle BOC = 120° + 120° = 240°$

$\therefore m\widehat{ABC} = 240$

$\widehat{AB}: m\angle AOB = 120° \Longrightarrow \therefore m\widehat{AB} = 120$

## مثال 4

الدائرة أدناه مقسمة الى 8 أجزاء متطابقة جد قياس الأقواس التالية ❶ $\widehat{AB}$ ❷ $\widehat{ABC}$ ❸ $\widehat{GDB}$




SoL

مجموع زوايا الدائرة $\frac{360°}{8} = 45°$ لكل زاوية

❶ $\widehat{AB}: m\angle AOE = 45° \Longrightarrow \therefore m\widehat{AB} = 45$

❷ $\widehat{ABC}: m\angle AOB + m\angle BOA = 45° + 45° = 90°$

$\therefore m\widehat{ABC} = 90$

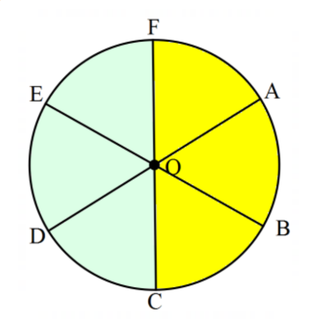
❸ $\widehat{GDB}: m\angle GOF + m\angle FOE + m\angle EOD + m\angle DOC + m\angle COB$

$\Rightarrow 45° + 45° + 45° + 45° + 45° = 225°$

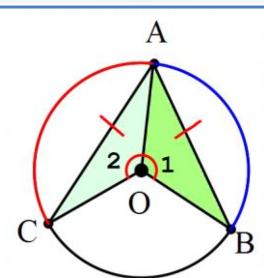
$\therefore m\widehat{GDB} = 225$

## H.W

الدائرة أدناه مقسمة الى 6 أجزاء متطابقة جد قياس الأقواس التالية ❶ $\widehat{AB}$ ❷ $\widehat{ABC}$ ❸ $\widehat{ABD}$

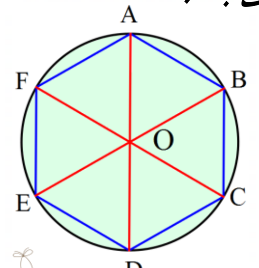



Ans: ① 60, ②120, ③180



لاحظ المثلثين والزاويتين المركزيتين 1, 2 والقوسين $\widehat{AB}, \widehat{CA}$ والوترين $\overline{AB}, \overline{CA}$ اذا تطابقت الزاويتان تطابق القوسان وتطابق المثلثان فيتطابق الوتران $\overline{AB}, \overline{CA}$ .

ويمكنك أن تستعمل مثل هذه الطريقة للتوصل إلى المبرهنة التالية ( بدون برهان ).



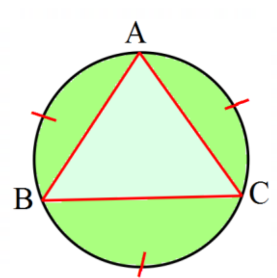

## مبرهنة 12

مبرهنة الأقواس و الأوتار والزاوية المركزية في كل دائرة أو في دائرتين متطابقتين

- اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق وتراها وبالعكس. $\angle 1 \cong \angle 2 \iff \overline{AB} \cong \overline{CA}$
- اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق قوساهما وبالعكس. $\angle 1 \cong \angle 2 \iff \widehat{AB} \cong \widehat{CA}$
- اذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس. $\widehat{AB} \cong \widehat{CA} \iff \overline{AB} \cong \overline{CA}$

### مثال 5

استعمل مبرهنة الأقواس والأوتار لتبرهن أن المثلث $ABC$ متساوي الأضلاع في الدائرة المجاورة علماً أن: $\widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{CB}$




SoL

معطى $\because \widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

حسب مبرهنة الاقواس و الاوتار $\therefore \overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{CB}$

( اذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس)

أذن المثلث $ABC$ متساوي الأضلاع لأنه أضلاعه متطابقة حسب مبرهنة 12

### مثال 6

الدائرة المجاورة مقسمة إلى أجزاء متطابقة برهن أن الشكل $ABCDEF$ سداسي منتظم؟



SoL

مجموع زوايا الدائرة $\frac{360°}{6} = 60°$ لكل زاوية في الشكل السداسي

معطى $\because \angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4 \cong \angle 5 \cong \angle 6 = 60°$

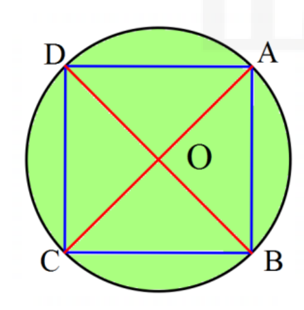
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AF} \cong \overline{FE} \cong \overline{ED} \cong \overline{DC} \cong \overline{BC}$

حسب مبرهنة الأقواس و الأوتار

( اذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس)

ازن الشكل $ABCDEF$ سداسي منتظم لان جميع أضلاعه متطابقة

**H.W** الدائرة المجاورة مقسمة إلى 4 أجزاء متطابقة برهن أن الشكل $ABCD$ مربع ؟

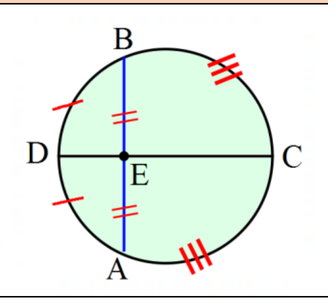





## 13 مبرهنة — مبرهنة القطر العمودي في كل دائرة

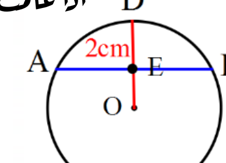
القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر و ينصف كلا قوسيه.

$\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow AO = BO, \widehat{AD} \cong \widehat{DB}, \widehat{BC} \cong AC$




### مثال 7

استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول الوتر، $AB$
ازا علمت أن نصف القطر $OD = 5cm$ و $DE = 2cm$




SoL

نرسم نصف القطر $\overline{OC}$ ليكتمل قطر الدائرة ونرسم نصف القطر $\overline{OB} = 5cm$

$OE = 5 - 2 = 3cm$

نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث $EBO$ لنجد القطعة $EB$

$(OB)^2 = (OE)^2 + (EB)^2$

$(5)^2 = (3)^2 + (EB)^2$

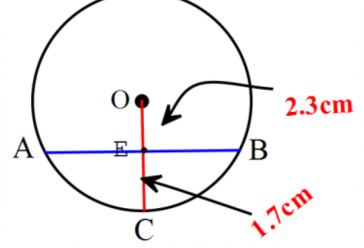
$(EB)^2 = 25 - 9 \Rightarrow (EB)^2 = 16 \xRightarrow{\text{بالجذر}} EB = 4cm$

القطر $DC$ عمودي على الوتر $AB$ و ينصفه (حسب مبرهنة القطر العمودي)

$\therefore AB = 2 \times EB = 2 \times 4 = 8cm$

### مثال 8

في الشكل المجاور استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول القطعة المستقيمة، $AB$ في الدائرة مقرباً لأقرب عُشر ؟




SoL

نرسم نصف القطر $\overline{OD}$ ليكتمل قطر الدائرة

ونرسم نصف القطر $\overline{OA} = 2.3 + 1.7 = 4cm$

نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث $EAO$ لنجد القطعة $EA$

$(OA)^2 = (OE)^2 + (EA)^2$

$(4)^2 = (2.3)^2 + (EA)^2$

$(EA)^2 = 16 - 5.29 \Rightarrow (EA)^2 = 10.71$

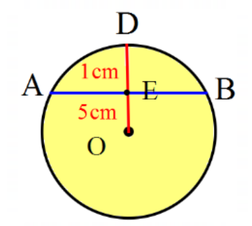
$\xRightarrow{\text{بالجذر}} EA \approx 3.3cm$

القطر $DC$ عمودي على الوتر $AB$ و ينصفه (حسب مبرهنة القطر العمودي)

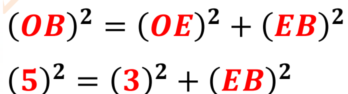
$\therefore AB = 2 \times EA = 2 \times 3.3 = 6.6cm$

### H.W

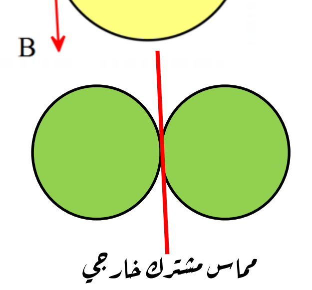
استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول الوتر $AB$ ازا علمت أن نصف القطر $OD = 6cm$ و $OE = 5cm$




Ans: $AB = 2\sqrt{11}cm$

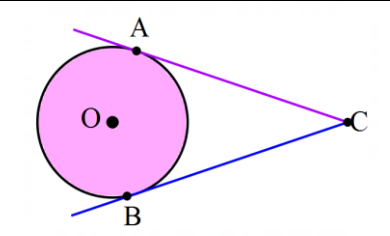
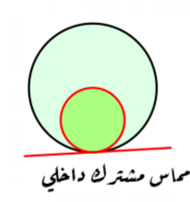
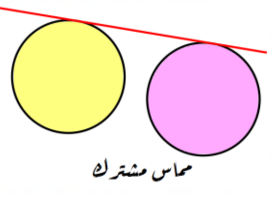


## ثانياً المماس في الدائرة :




**مماس الدائرة:** هو المستقيم الذي يلاقي الدائرة في نقطة واحدة تعرف بنقطة التماس ويكون عمودياً على نصف القطر في نقطة التماس.

**المماس المشترك لدائرتين:** هو مستقيم مماس لكل من الدائرتين .

مماس مشترك خارجي | مماس مشترك داخلي | مماس مشترك

## مبرهنة 14 : مبرهنة المماسين

القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان.

اذا، $\overline{CB}, \overline{CA}$ مماسان للدائرة من نقطة $C$

$\therefore \overline{CB} \cong \overline{CA}$

### مثال 9

دائرة مركزها $O$ في الشكل المجاور، $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة في $A$ ، $m\angle ABO = 35°$ جد قياس الزاوية $m\angle AOB$ ثم جد طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ ؟

SoL

$\overline{AB}$ مماس للدائرة في $A$ ) معطى

حسب مبرهنة المماسين $\therefore \overline{AB} \perp \overline{AO}, m\angle OAB = 90°$

$\because m\angle OAB = 90°, m\angle OBA = 35°$

مجموع زوايا المثلث $ABO$ هو $180°$

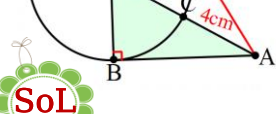
$\therefore m\angle AOB = 180° - (90° + 35°)$

$m\angle AOB = 180° - 125° = 55°$

من مبرهنة المماسين $BC = 12cm$

### مثال 10

استعمل مبرهنة المماسين لتجد طول القطع المستقيمة $\overline{AD}, \overline{AB}$ في الشكل المجاور.



SoL

$OC = 6cm$ وهو يمثل نصف قطر الدائرة أذن $OB = 6$

$AO = 6 + 4 = 10cm$

نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث $BOA$ لنجد القطعة $AB$

$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (10)^2 = (6)^2 + (AB)^2$

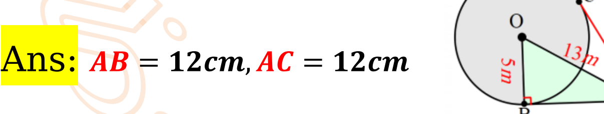
$(AB)^2 = 100 - 36 \Rightarrow (AB)^2 = 64 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} AB = 8cm$

بما انه، $\overline{AB}$ مماس الدائرة في $B$ وعمودي على $\overline{BO}$،

من مبرهنة المماسين $\therefore AD = 8cm$

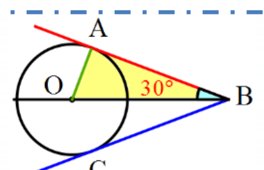
### H.W

❶ استعمل مبرهنة المماسين لتجد طول القطع المستقيمة $\overline{AB}, \overline{AC}$ في الشكل المجاور.



Ans: $AB = 12cm, AC = 12cm$

❷ دائرة مركزها $O$ في الشكل المجاور، $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة في $A$ ، $m\angle ABO = 30°$ جد قياس الزاوية $m\angle AOB$ ثم جد طول القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ ؟ علماً أن $\overline{AB} = 4cm$

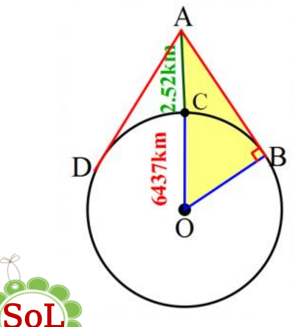


Ans: $BC = 4cm, m\angle AOB = 60°$





## مسائل حياتية




❶ جغرافية (براكين): ترتفع فوهة بركان (هولالاي) عن مستوى سطح البحر $2.52km$، احسب المسافة بين قمة البركان ومستوى الأفق اذا علمت أن نصف قطر الأرض $6437km$ تقريباً. مقربا الناتج لأقرب كيلو متر

**SoL**

$OC = 6437km$ وهو يمثل نصف قطر الدائرة أذن $OB = 6437km$

$AO = 6437 + 2.52 = 6439.52km$ حسب مبرهنة المماس

نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث $BOA$ لنجد القطعة $AB$

$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2$

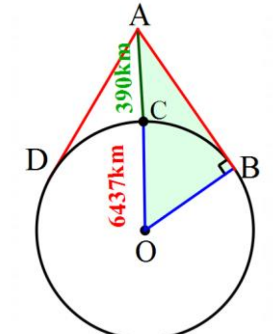
$(6439.52)^2 = (6437)^2 + (AB)^2$

$(AB)^2 = (6439.52)^2 - (6437)^2$

$(AB)^2 = 41467417.83 - 4143969$

$(AB)^2 = 32448.83 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AB \approx 180km$

هي المسافة بين القمة والأفق بالتقريب




❷ محطة فضائية: تبعد محطة مير الروسية عن مستوى سطح البحر $390km$، تقريباً ما المسافة بين المحطة والأفق اذا علمت أن نصف قطر الأرض $6437km$ تقريباً.

**SoL**

$OC = 6437km$ وهو يمثل نصف قطر الدائرة أذن $OB = 6437km$

$AO = 6437 + 390 = 6827km$ حسب مبرهنة المماس

نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث $BOA$ لنجد القطعة $AB$

$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2$

$(6827)^2 = (6437)^2 + (AB)^2$

$(AB)^2 = (6827)^2 - (6437)^2$

$(AB)^2 = 46607929 - 4143969$

$(AB)^2 = 5172960 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AB \approx 2274km$

هي المسافة بين المحطة والأفق



اطمئن فصوتك يسمعه الله

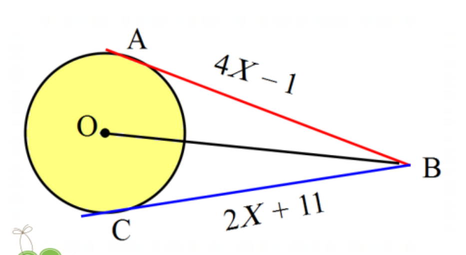
حين تظن أنه لا احد

يسمعك.........










## اولاً تــحدِ

استعمل مبرهنة المماسين وجد طول $\overline{AB}$ في الدائرة المجاورة .

SoL

حسب مبرهنة المماسين ← القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان.

$\therefore \overline{AB} \cong \overline{BC}$

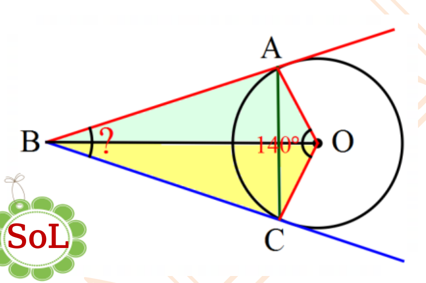
$4x - 1 = 2x + 11 \Rightarrow 4x - 2x = 11 + 1$

$2x = 12 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x = 6 \Longrightarrow \therefore AB = 4x - 1 = 4(6) - 1 = 23$

$\therefore AB = 23$

## ثانياً حس عددي

اذا كانت الزاويتان، $\angle AOB, \angle COB$ متطابقتان، جد طول $\overline{CB}$، في الدائرة المجاورة



SoL

حسب مبرهنة الأقواس والأوتار ← اذا تطابقت زاويتان مركزيتان فيطابق وتراهما وبالعكس.

$\therefore \overline{CB} \cong \overline{AB}$

$8y - 8 = 6y \Rightarrow 8y - 6y = 8$

$2y = 8 \overset{\div 2}{\Rightarrow} y = 4 \Longrightarrow \therefore CB = 8y - 8 = 8(4) - 8 = 24$

$\therefore CB = 24$

## ثالثاً اكتب

الخطوات اللازمة لتجد قياس زاوية، $\angle ABC$ في الرسم المجاور

اذا علمت أن، $\overline{BO}$ ينصف الزاوية $\angle AOC$ والتي قياسها $140°$.

SoL

بما انه $\overline{BO}$ ينصف الزاوية $\angle AOC$ ازن أيضا ينصف، $\angle ABC$

$\therefore m\angle ABC = 2 \times m\angle ABO$

$m\angle ABC = 2 \times 20°$

$m\angle ABC = 40°$

أو تجد قياسها من خلال المثلث $BCO$ لانة الزاوية $\angle ABC$ مقسومه

الى زاويتين $\angle ABO$ و $\angle CBO$

المثلث $BAO$ فيه

$\overline{AB} \perp \overline{AO} \Rightarrow m\angle BOA = 90°$ , مبرهنة المماسين

$m\angle AOB = \frac{140°}{2} = 70°$

$m\angle ABO = 180° - (90° + 70°)$

$m\angle ABO = 180° - 160°$

$m\angle ABO = 20°$

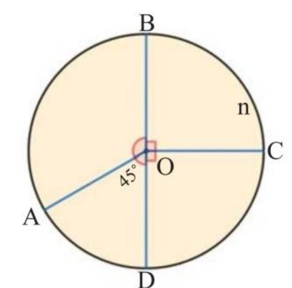
مجموع زوايا المثلث $180°$




## Multiple Choice الاختيارُ من متعدد

الدرس [4-5] الدائرة

## The Circle




انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (1-4):

1 قياس الزاوية ∠AOB هو:

a) 180° b) 135° ✓ c) 90° d) 45°

2 قياس القوس $\widehat{AB}$ هو:

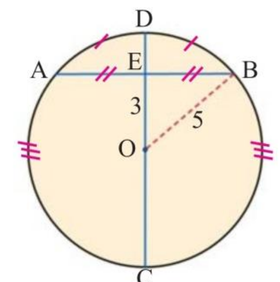
a) 180 b) 90 c) 135 ✓ d) 45

3 قياس القوس $\widehat{ABC}$ هو:

a) 180 b) 90 c) 225 ✓ d) 135

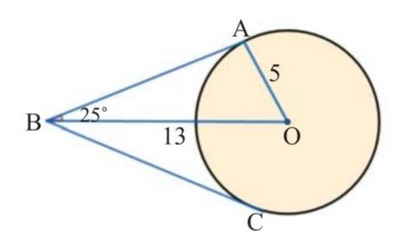
4 قياس القوس $\widehat{BC}$ هو:

a) 90 ✓ b) 42 c) 45 d) 135




5 طول الوتر AB في الشكل المجاور هو:

a) 12 b) 10 c) 6 d) 8 ✓




انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (6-7):

6 قياس ∠AOB هو:

a) 115° b) 120° c) 65° ✓ d) 90°

7 طول القطعة المستقيمة BC هو:

a) 10 b) 14 c) 12 ✓ d) 5

# الدرس (5 – 5) المثلث والدائرة ، القطع المستقيمة و الدائرة

سوف نقسم الدرس إلى قسمين الأول المثلث والدائرة و الثاني القطع المستقيمة والدائرة

## اولاً المثلث و الدائرة

سوف نقسم هذه البند إلى نوعين النوع الأول رسم الدائرة المحيطة بالمثلث و النوع الثاني رسم الدائرة المحاطة بالمثلث

**النوع الأول** ← رسم الدائرة المحيطة بالمثلث: (الخارجية للمثلث)

**الدائرة المحيطة بالمثلث:** لكل مثلث أو (لكل ثلاث نقاط ليس على استقامة واحدة) دائرة واحدة تحيط به مركزها نقطة تقاطع المحاور الثلاثة للمثلث (كما في مبرهنة القطع المتوسطة التي تطرقنا لها في الدرس 2 لهذه الفصل )

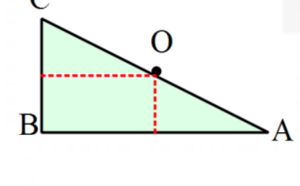
**المحاور:** هي الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تلتقي بنقطة واحدة $O$ ، تكون متساوية البعد عن رؤوسه ، وهذه النقطة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

**استنتاجات تعريف المحاور:**

- النقاط $F, D, E$ هي منتصفات للأضلاع $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ على الترتيب.
- أطوال القطع ، $AF = FC\ ,\ BE = AE\ , BD = DC$ لانهما متناصفات
- الزوايا $\angle D, \angle F\ , \angle E$ قائمة وقياسها $90°$
- من مبرهنة منصفات زوايا المثلث (الدرس2) تكون القطع، $OA = OB = OC$، $= r$ متساوية وتساوي نصف قطر الدائرة وهي منصفات زوايا رؤوس المثلث.

**تنبيه:** رسم الدائرة المحيطة بالمثلث تعتمد على محاور المثلث.

**مثال 1** جد نقطة تقاطع محاور المثلث، $ABC$ كما في الشكل المجاور. ثم ارسم الدائرة المحيطة به؟

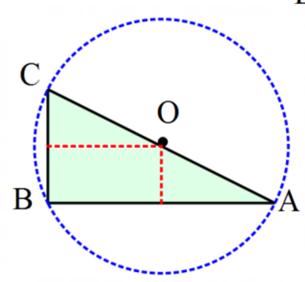



نرسم محورا للضلع، $\overline{BA}$ الذي يخرج من منتصفه ويوازي الضلع، $\overline{BC}$

نرسم محورا للضلع، $\overline{BC}$ الذي يخرج من منتصفه ويوازي الضلع، $\overline{AB}$

محور الضلع، $\overline{CA}$ هو منتصف الضلع حيث هو ملتقى المحاور الثلاثة للمثلث

وهو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث، $ABC$ الآن نرسم الدائرة

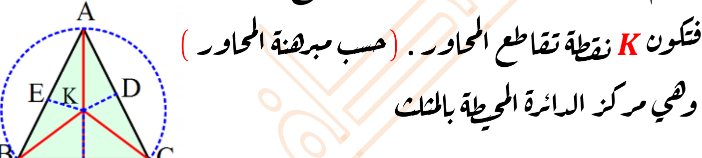


## مثال 2

المثلث $ABC$ متساوي الساقين، $\overline{AB} = \overline{AC}$، $N$ منتصف $\overline{BC}$، $\overline{KA} \cong \overline{BC}$، برهن أن $K$ هي نقطة تقاطع محاور المثلث $ABC$، ثم ارسم الدائرة المحيطة به؟ في الشكل المجاور

SoL

نرسم القطعة $\overline{KB}$ فتكون $K$ نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث



نرسم أعمدة من $K$ إلى منتصفات الأضلاع فتكون المحاور، $\overline{NK}, \overline{DK}, \overline{EK}$

فتكون $K$ نقطة تقاطع المحاور. (حسب مبرهنة المحاور)

وهي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

## مثال 3

المثلث $ABC$ منتظم، طول ضلعه $12cm$ حدد نقطة تقاطع محاوره ثم ارسم الدائرة المحيطة به؟ وجد طول قطرها؟

SoL

بما ان المثلث متساوي الاضلاع ازن الاعمدة المقامة على اضلاعه تنصفها وتلتقي في نقطة واحدة هي نقطة تقاطع محاوره $O$

ازن $O$ هي مركز الدائرة (حسب مبرهنة المحاور)

ثم نرسم الدائرة المحيطة

المثلث $AFC$ فيه، $FC = 6cm, AC = 12cm$

نستخدم نظرية فيثاغورس $(AC)^2 = (FC)^2 + (AF)^2$

$(12)^2 = (6)^2 + (AF)^2 \Rightarrow 144 = 36 + (AF)^2$

$(AF)^2 = 144 - 36 \Rightarrow (AF)^2 = 108 \xRightarrow{\text{بالجذر}} AF = 6\sqrt{3}$

$\xRightarrow{\text{مبرهنة القطع المتوسطة}} AO = \frac{2}{3}AF \Rightarrow AO = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} \Rightarrow AO = 4\sqrt{3}$ نصف القطر

فيكون القطر $2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}cm$

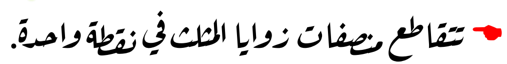
## H.W

$ABC$ مثلث قائم متساوِ الساقين وتره، $\overline{BC}$ حدد نقطة تقاطع محاور هذه المثلث وارسم الدائرة المحيطة به؟

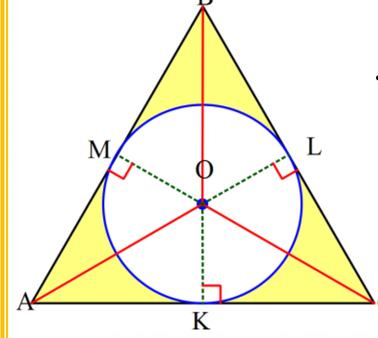
## النوع الثاني ☚ رسم الدائرة المحاطة بالمثلث (المثلث المحيط بالدائرة) (الداخلية للمثلث)

الدائرة المحاطة بالمثلث: لكل مثلث توجد دائرة داخل هذه المثلث مماسه لأضلاعه الثلاثة وتسمى الدائرة المحاطة بالمثلث.

نستفاد من مبرهنة منصفات زوايا المثلث في رسم الدائرة المحاطة بالمثلث.



- تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع منصفات الزوايا تقع على المسافة نفسها من الأضلاع الثلاثة. $OA = OB = OC$
- القطع $OL = OK = OM = r$، وتساوي نصف قطر الدائرة



## مثال 4

$ABC$ مثلث قائم متساوِ الساقين طول كل من ساقية، $6cm$ ارسم الدائرة المحيطةبه وجد مساحة الدائرة ؟

SoL

من نظرية فيثاغورس $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ نجد طول الوتر

$(AC)^2 = (6)^2 + (6)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 36 + 36$

$(AC)^2 = 72 \xRightarrow{\text{بالجذر}} AC = 6\sqrt{2}cm$

من مبرهنة 4 $AD = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = 3\sqrt{2}cm$

مبرهنة المماسين) $AD = AK = 3\sqrt{2}$

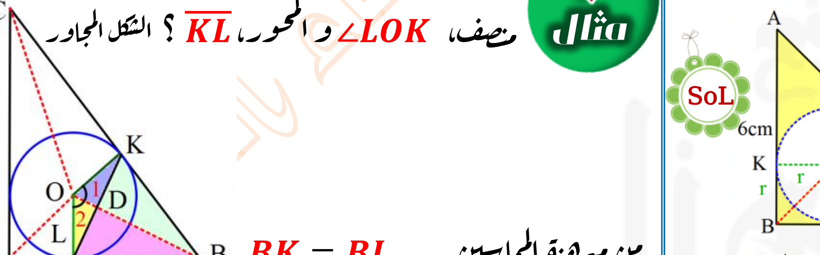
نصف القطر $r = AB - AK = 6 - 3\sqrt{2}\ cm$

مساحة الدائرة $A = r^2\pi \Rightarrow A = (6 - 3\sqrt{2})^2\pi$

$A = (1.75)^2\pi \rightarrow A = 3.1\pi\ cm^2$

## مثال 5

الدائرة التي مركزها $O$ محاطة بالمثلث $ABC$ برهن أن $\overline{BO}$، منصف $\angle LOK$ والمحور، $\overline{KL}$ ؟ الشكل المجاور



SoL

من مبرهنة المماسين $BK = BL$

انصاف اقطار دائرة $OK = OL$

بما انه المثلثان، $BOK, BOL$ متطابقان (من مبرهنة التطابق ض.ض.ض)

أزن من التطابق نحصل على. $m\angle 1 = m\angle 2 \Leftarrow \overline{BO}$ ينصف $\angle LOK$

المثلثان، $KDB, LDB$ متطابقان (من مبرهنة التطابق ض.ز.ض)

$\overline{KL} = \overline{BO}$

$\therefore \overline{KL}$ محور $\overline{BO}$

# ثانياً القطع المستقيمة و الدائرة

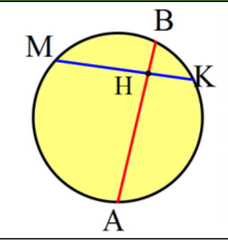
تعلمت في الدرس (5-4) كيف تجد أطوال أجزاء من وتر يتقاطع مع قطر عمودي عليه. في هذه الدرس سوف نتعلم كيف نجد أطوال أوتار متقاطعة أخرى.

## مبرهنة القاطعين

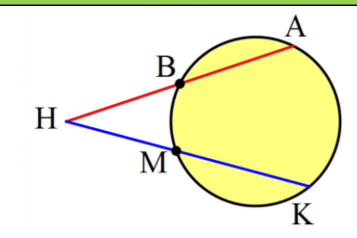


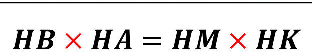
**مبرهنة 15**

اذا قطع مستقيمان متقاطعان دائرة تشكل على كل منهما قطعتان مستقيمتان ناتجا ضرب طوليهما متساويان.



$HM \times HK = HB \times HA$



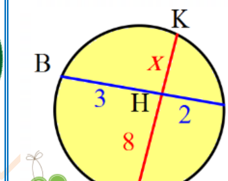


$HB \times HA = HM \times HK$

- اذا كانت نقطة التقاطع $H$ خارج الدائرة: فيكون القانون لكل وتر هو حاصل ضرب جزء الوتر الخارج من الدائرة × طول الوتر الكلي
- اذا كانت نقطة التقاطع $H$ داخل الدائرة: فيكون القانون لكل وتر هو حاصل ضرب الجزء الأول من الوتر × الجزء الثاني من الوتر

### مثال 6

جد قيمة $x$ وطول كل وتر للشكل المجاور





تنبيه: نقطة التقاطع داخل الدائرة

SoL: نستخدم مبرهنة القاطعين

$HM \times HK = HB \times HA$

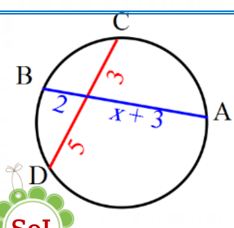
$8 \times x = 3 \times 2 \Rightarrow 8x = 6 \xrightarrow{\div 8} x = \frac{6}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

طول الوتر $AB$: $\therefore AB = 3 + 2 = 5$

طول الوتر $MK$: $MK = 8 + x = 8 + \frac{3}{4} = \frac{35}{4}$

### مثال 8

جد قيمة $x$ وطول كل قطعة مجهولة



SoL: نستخدم مبرهنة القاطعين

$HD \times HC = HB \times HA$

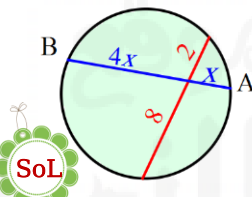
$5 \times 3 = 2 \times (x+3) \Longrightarrow 15 = 2x + 6$

$15 - 6 = 2x \Rightarrow 2x = 9 \xrightarrow{\div 2} x = \frac{9}{2} = 4.5$

طول الوتر: $AB = 2 + x + 3 = x + 5 = 4.5 + 5 = 9.5$

### مثال 7

جد قيمة $x$ وطول كل قطعة مجهولة



تنبيه: نقطة التقاطع داخل الدائرة

SoL: نستخدم مبرهنة القاطعين

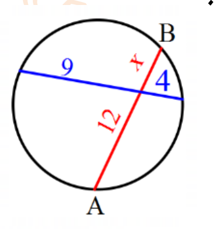
$HM \times HK = HB \times HA$

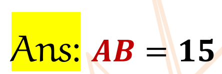
$8 \times 2 = 4x \times x \Rightarrow 16 = 4x^2 \xrightarrow{\div 4} x^2 = 4 \xrightarrow{\text{بالجذر}}$
$x = 2$

طول الوتر $AB$: $\therefore AB = 4x + x = 5x = 5 \times 2 = 10$

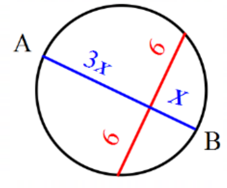
### H.W

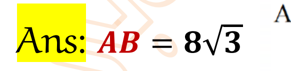
جد قيمة $x$ وطول كل قطعة مجهولة للأشكال التالية:

1.


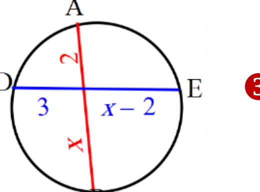


Ans: $AB = 15$

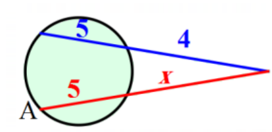
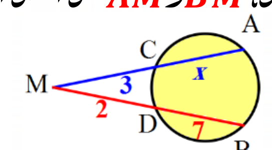
2.




Ans: $AB = 8\sqrt{3}$

3.


Ans: $AB = 8, DE = 7$

## مثال 9

جد قيمة $x$ و طول كل من $\overline{BM}$ و $\overline{AM}$ من الشكل المجاور

SoL

تنبيه: نقطة التقاطع خارج الدائرة.

نستخدم مبرهنة القاطعين

$MD \times MB = MC \times MA$

نجمع طول الوتر الكلي

$2 \times (2+7) = 3 \times (3+x) \Rightarrow 2 \times 9 = 3 \times (3+x)$

$18 = 9 + 3x \Rightarrow 3x = 18 - 9 \Rightarrow 3x = 9 \overset{\div 3}{\Longrightarrow} x = 3$

طول الوتر $BM$: $\therefore BM = 2 + 7 = 9$

طول الوتر $AM$: $AM = 3 + x = 3 + 3 = 6$

## مثال 10

جد قيمة $x$ وطول كل قطعة مجهولة من الشكل المجاور

SoL

تنبيه: نقطة التقاطع خارج الدائرة.

نستخدم مبرهنة القاطعين \ عندما لا يعطيك كل الرموز ليس بالضرورة كتابة قانون المبرهنة

$x \times (x+5) = 4 \times (4+5) \Rightarrow x^2 + 5x = 36$

$\Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (x+9)(x-4) = 0$

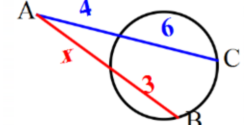
اما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$ يهمل

او $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

طول الوتر $AB$: $\therefore AB = x + 5 = 4 + 5 = 9$

## H.W

جد قيمة $x$ وطول كل قطعة مجهولة من الشكل المجاور



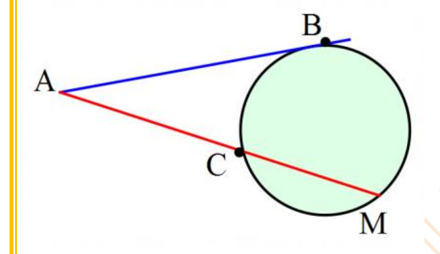
Ans: $AB = 8$

يمكن استعمال المبرهنة التالية اذا كان هناك مستقيم قاطع للدائرة و أخر مماس للدائرة. فيكون المماس هو الجزء الخارجي والكلي للمقطعة نفسها



## مبرهنة 16

### مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

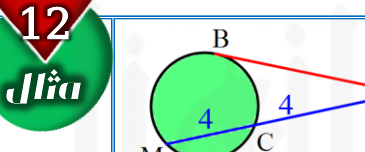


من نقطة خارج الدائرة اذا رسم مماساً و مستقيماً قاطعاً لها . فأن ناتج ضرب طولي قطعتي القاطع ، يساوي مربع طول قطعة المماس $AC \times AM = (AB)^2$

تذكير: نقطة التقاطع خارج الدائرة: فيكون قانون قاطع الدائرة هو حاصل ضرب جزء الوتر الخارج من الدائرة × طول الوتر الكلي

## مثال 11

جد طول قطعة المماس، $\overline{AB}$



SoL

تنبيه: بما انه قاطع و مماس

نستخدم مبرهنة المماس والقاطع

$AC \times AM = (AB)^2$

$4 \times (4+4) = (AB)^2$

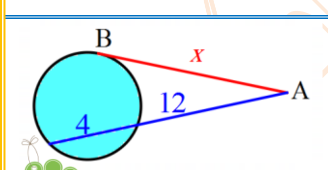
$4 \times 8 = (AB)^2$

$32 = (AB)^2 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AB = \sqrt{32}$

$\therefore AB = 4\sqrt{2}$

## مثال 12

جد قيمة $x$ وطول، $\overline{AB}$





SoL

تنبيه: بما انه قاطع و مماس

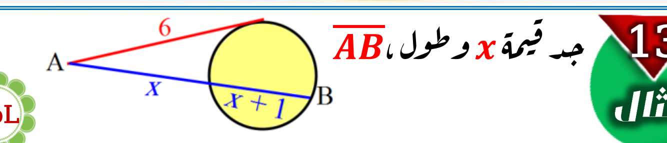
نستخدم مبرهنة المماس والقاطع \ عندما لا يعطيك كل الرموز ليس بالضرورة كتابة قانون المبرهنة

$12 \times (12+4) = (x)^2$

$12 \times 16 = (x)^2$

$192 = (x)^2 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x = \sqrt{192} \Rightarrow x = 8\sqrt{3}$

$\therefore AB = 8\sqrt{3}$




جد قيمة $x$ وطول $\overline{AB}$،

SoL

نستخدم مبرهنة المماس والقاطع (مجموع طول القاطع $AB$)

$x \times (x + x + 1) = (6)^2 \Longrightarrow x(2x + 1) = 36$

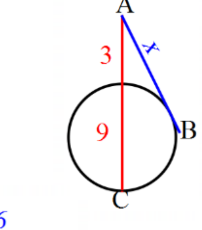
$2x^2 + x - 36 = 0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (2x + 9)(x - 4) = 0$

اما $2x + 9 = 0 \Rightarrow 2x = -9 \Rightarrow x = \frac{-9}{2}$ يهمل

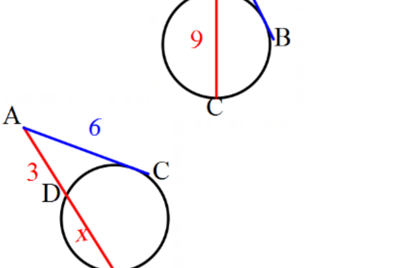
او $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$\therefore AB = x + x + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$

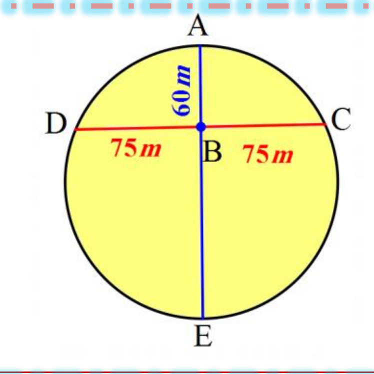
**H.W** جد قيمة $x$ وطول $\overline{AB}$، في الأشكال التالية.



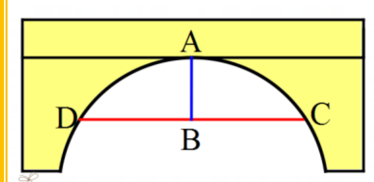

❶ Ans: $AB = 6$




❷ Ans: $AB = 12$




❶ بناء: يرتكز جسر على قوس دائرة كما مبين في الشكل المجاور، $\overline{AB}$ محور $\overline{DC}$ و $AB = 60m$، $DC = 150m$، ما قطر الدائرة؟






SoL

بما ان $\overline{AB}$ محور $\overline{DC}$ أذن $BD = BC = 75m$ حسب تعريف المحاور

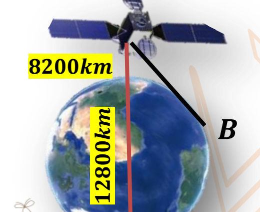
من مبرهنة القاطعين $BD \times BC = AB \times BE$

$75 \times 75 = 60 \times BE \Longrightarrow 5625 = 60BE \overset{\div 60}{\Longrightarrow}$

$BE = \frac{5625}{60} \Longrightarrow BE = 93.75m$

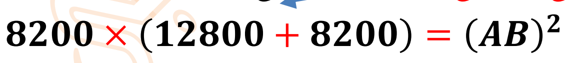
القطر $AE = AB + BE = 60 + 93.75 = 153.75m$

❷ فضاء: قمر صناعي يدور حول الأرض على ارتفاع $8200km$ اذا كان قطر الأرض $12800km$ تقريباً ما المسافة التي تفصل القمر عن نقطة $B$ في الشكل المجاور؟




SoL

باستخدام مبرهنة المماس والقاطع

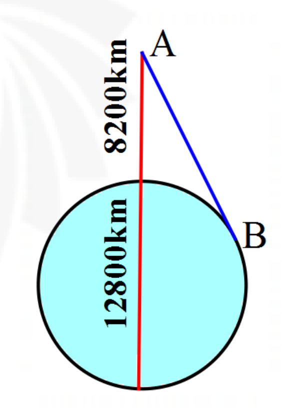



$8200 \times (12800 + 8200) = (AB)^2$

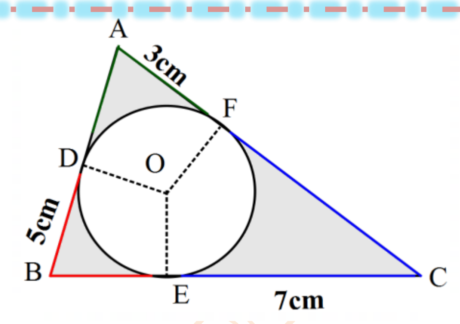
$8200 \times 21000 = (AB)^2$

$(AB)^2 = 172200000 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}$

$AB \approx 13122.5km$



❸ هندسة: $O$ نقطة تقاطع محاور المثلث $ABC$، جد محيط المثلث مستعملا الشكل أدناه؟




SoL

بما انه $O$ نقطة تقاطع المحاور أذن من تعريف المحاور (هي الأعمدة المقامة على أضلاع ع مثلث من منتصفاتها)

$\therefore AF = FC = 3cm\ , AD = DB = 5cm\ , BE = EC = 7cm$

محيط المثلث هو مجموع أضلاعه الثلاثة $\therefore$ المحيط $= AC + AD + BC$

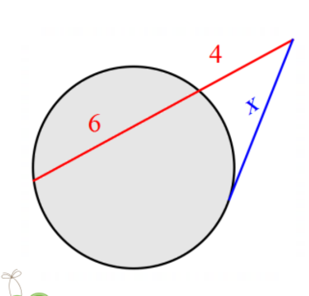
المحيط $= (3+3) + (5+5) + (7+7)$

المحيط $= 6 + 10 + 14 = 30cm$




## اولاً اكتشف الخطأ

فيما يلي حلان لإيجاد قيمة $x$ في الشكل المجاور، إيهما الحل الخطأ. برر أجابتك؟




| الحل الثاني | الحل الأول |
|---|---|
| مبرهنة المماس و القاطع $x^2 = 40$ <br> $x = 2\sqrt{10}$ | مبرهنة المماس و القاطع $4 \times 6 = x^2$ <br> $24 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ |

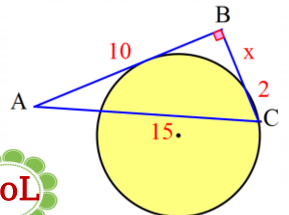
SoL

الحل الأول هو الخطأ لأنه طول القاطع عندما تكون نقطة التقاطع خارج الدائرة هو حاصل ضرب الجزء الخارج من الدائرة في طول القاطع كلة

فيكون $4 \times (4+6) = 40$ وليس $4 \times 6 = 24$ فيكون الحل الثاني هو الصحيح

## ثانياً تحدِ

في الشكل المجاور $AB = 10$ وهو مماس للدائرة، جد قيمة $x$.




SoL

باستخدام نظرية فيثاغورس

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(15)^2 = (10)^2 + (x+2)^2$

$225 = 100 + (x+2)^2 \Longrightarrow (x+2)^2 = 225 - 100$

$(x+2)^2 = 125 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x + 2 = \pm 5\sqrt{5}$

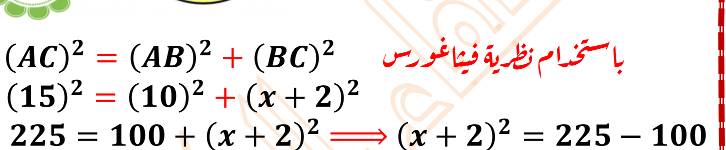
اما $x + 2 = 5\sqrt{5} \Longrightarrow x = 5\sqrt{5} - 2 \Longrightarrow x \approx 9.18$

او $x + 2 = -5\sqrt{5} \Longrightarrow x = -5\sqrt{5} - 2 \approx -13.18$ تهمل

## ثالثاً مسألة مفتوحة

في الشكل المجاور دائرة مركزها $O$، $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BD}$ مماسات للدائرة

جد طول القطعة $\overline{BC}$ ؟




SoL

حسب مبرهنة المماسين

$EB = DB = 13$

$CE = CA = 10$

$\therefore BC = CE + EB$

$BC = 10 + 13$

$BC = 23$

## رابعاً اكتب

مسألة تستعمل فيها المحاور ومنصفات الزوايا لمثلث في رسم دائرة محيطة به؟

SoL

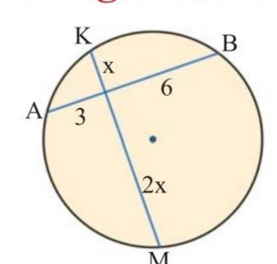
راجع مثال 2 من هذه الدرس

## Multiple Choice — الاختيار من متعدد

### الدرس [5-5] المثلث والدائرة، القطع المستقيمة والدائرة

### Triangle and Circle Line Segments and Circle

**انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (1-2):**



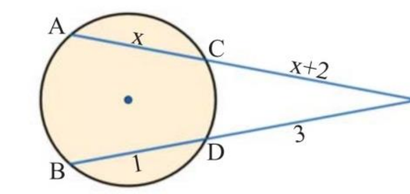

1 قيمة x هي:

a) 2 b) 6 c) 9 d) 3 ✓

2 طول الوتر $\overline{MK}$ هو:

a) 12 b) 9 ✓ c) 5 d) 4

**انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (3-5):**




3 قيمة x هي:

a) 2 b) 3 c) 1 ✓ d) 4

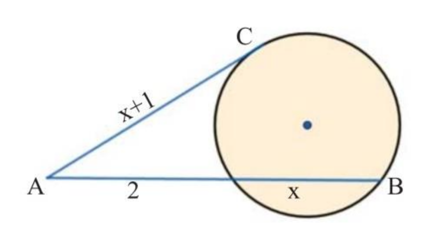
4 طول $\overline{BM}$ هو:

a) 4 ✓ b) 6 c) 5 d) 2

5 طول $\overline{AM}$ هو:

a) 4 ✓ b) 2 c) 6 d) 3

**انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (6-8):**




6 قيمة x هي:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ ✓ d) 0

7 طول المماس هو:

a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{3}+1$ ✓ c) 4 d) $\sqrt{5}+1$

8 طول $\overline{AB}$ هو:

a) $\sqrt{3}+6$ b) $\sqrt{3}+2$ ✓ c) $\sqrt{3}+5$ d) $\sqrt{3}+4$

## الدرس (5 – 6) الزوايا و الدائرة

سوف نقسم الدرس إلى ثلاثة أقسام الأول الزاوية المحيطية و الثاني الزاوية المماسية و الثالث الزوايا الداخلية والخارجية في الدائرة

### اولاً الزاوية المحيطية : هي الزاوية التي رأسها نقطة من نقاط الدائرة و ضلعاها وتران في الدائرة.

سوف نتعرف على كيفية إيجاد قياسها باستعمال القوس المواجه لها بواسطة المبرهنات الأتية التي سنقبلها بدون برهان

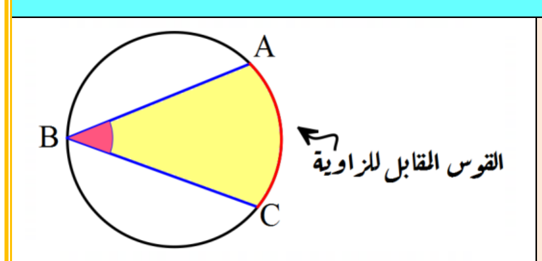
#### مبرهنة الزوايا المحيطية



مبرهنة 17

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المواجه لها.

$$m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$$




ملاحظة: ليس دائما ولكن كثيراً . اذا كانت الزاوية رمزها مكون من ثلاثة احرف فان الحرف الأول و الأخير هو قوسها

**مثال 1** جد قياس الزوايا المحيطية التالية ① $m\angle D$ ② $m\angle BAD$ في الشكل المجاور.

SoL

① $m\angle D = \frac{1}{2} m\widehat{ECA}$ مبرهنة الزوايا المحيطية

$m\angle D = \frac{1}{2} \times 140 \Longrightarrow \therefore m\angle D = 70°$

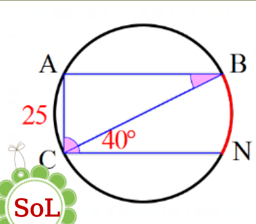
② $m\angle BAD = \frac{1}{2} m\widehat{DB}$ مبرهنة الزوايا المحيطية

القوس $\widehat{DB}$ مجهول . قياس الزاوية $\angle BED$ معلوم

و الذي تشترك مع $\angle BAD$ بنفس القوس إذن قياس الزاويتين متساوي

$m\angle BAD = m\angle BED = 30°$

**مثال 2** جد قياس كل مما يأتي من الشكل المجاور ① $m\angle ABC$ ② $m\angle ACB$ ③ $m\widehat{BN}$




① $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$ مبرهنة الزوايا المحيطية

$m\angle ABC = \frac{1}{2} \times 25 \Longrightarrow \therefore m\angle ABC = 12.5°$

② $m\angle ACB = 180° - (m\angle BAC + m\angle ABC)$

(مجموع زوايا المثلث $ABC$ تساوي $180°$) زاوية قائمة

$m\angle ACB = 180° - (90° + 12.5)$

$m\angle ACB = 180° - 102.5 = 77.5°$

③ $m\widehat{BN}$: $m\angle BCN = \frac{1}{2} m\widehat{BN}$

نلاحظ أن القوس $\widehat{BN}$ يقابل الزاوية $\angle BCN$ فنطبق قانون مبرهنة الزوايا المحيطية عليه

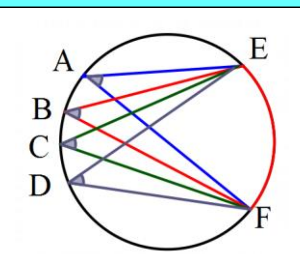
$40 = \frac{1}{2} m\widehat{BN}$ طرفين في وسطين

$m\widehat{BN} = 2 \times 40 \Longrightarrow \therefore m\widehat{BN} = 80$

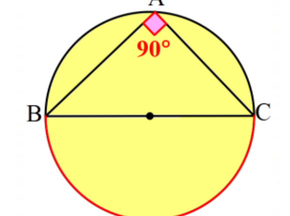
**H.W**

جد قياس كل مما يأتي من الشكل المجاور ① $m\widehat{BE}$ ② $m\angle CAB$

Ans: $m\widehat{BE} = 160, m\angle CAB = 30°$



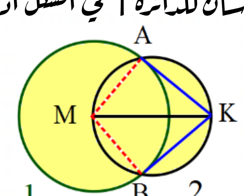
## مبرهنة 18 مبرهنة الزوايا المحيطية المواجهة للقوس نفسه




كل الزوايا المحيطية التي تواجه قوساً مشتركاً على الدائرة تتطابق

$$m\angle A \cong m\angle B \cong m\angle C \cong m\angle D = \frac{1}{2}m\widehat{EF}$$

### هنالك حالة خاصة للزاوية المحيطية عندما تكون قائمة:




- كل زاوية محيطية تواجه نصف دائرة تكون قائمة وقياسها 90° فيكون قياس قوسها 180 لأنه نصف دائرة
- كل زاوية محيطية تواجه قطراً تكون قائمة.
- كل زاوية محيطية قائمة تواجه قطراً.

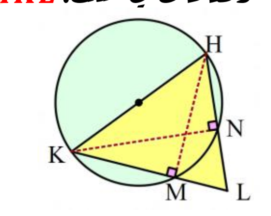
$$m\angle A = \frac{1}{2}m\widehat{BC} = 90°$$

تذكير: مجموع الأقواس الكلية في الدائرة هي 360

### مثال 3

دائرة قطرها $KH$، تقطع $HL$ في $N$ وتقطع $KL$ في $M$

برهن أن، $HM, KN$ ارتفاعات في المثلث $HKL$. في الشكل أدناه




SoL

زاوية محيطية تواجه القطر $KH$ ∵ $m\angle HNK$

زاوية قائمة من الحالة الخاصة ∴ $m\angle HNK = 90°$

فيكون $KN$ ارتفاع في المثلث $HKL$ من تعريف ارتفاعات المثلث (الدرس2)

زاوية محيطية تواجه القطر $KH$ ∵ $m\angle HMK$

زاوية قائمة من الحالة الخاصة ∴ $m\angle HMK = 90°$

فيكون $HM$ ارتفاع في المثلث $HKL$

### مثال 4

اذا علمت أن، $M$ مركز الدائرة 1 و، $MK$ هو قطر الدائرة 2

برهن أن، $KB$ و $KA$ مماسان للدائرة 1 في الشكل أدناه

SoL

نرسم $MB$ و $MA$ أنصاف أقطار في الدائرة 1

زوايا محيطية تواجه القطر $MK$ ∵ $m\angle MBK , m\angle MAK$

زوايا قائمة من الحالة الخاصة ∴ $m\angle MBK = m\angle MAK = 90°$

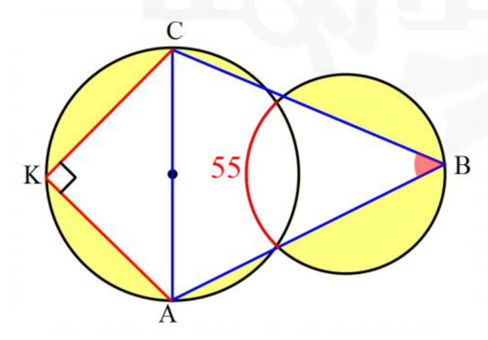
أذن حسب تعريف المماس (الدرس4)

يكون، $KB$ و $KA$ مماسان للدائرة 1

لأنه المماس يكون عمودياً على نصف القطر من نقطة التماس (يكون زاوية قائمة)

زوايا قائمة $m\angle MBK , m\angle MAK$

H.W جد قياس كل مما يأتي: ❶ $m\angle CKA$ ❷ $m\angle CBA$

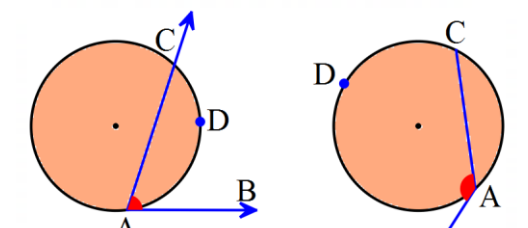



Ans: $m\angle CKA = 90°, m\angle CBA = 27.5°$









## ثانياً الزاوية المماسية

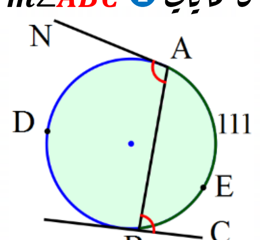
الزاوية المماسية: هي الزاوية التي يشكلها مماس الدائرة مع مستقيم أخر يمر في نقطة التماس (وتر الدائرة).

### مبرهنة الزوايا المماسية




اذا تقاطع مماس الدائرة مع مستقيم يمر في نقطة التماس يكون قياس الزاوية بينهما قياس القوس المقتطع

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{ADC}$$



### مثال 5

باستعمال مبرهنة الزوايا المماسية جد قياس كل مما يأتي ❶ $m\angle BAC$ ❷ $m\widehat{NC}$

SoL

❶ $m\angle BAC = \frac{1}{2} m\widehat{CA}$ مبرهنة الزوايا المماسية

$m\angle BAC = \frac{1}{2} \times 144$ نعوض قيمة القوس

$m\angle BAC = 72°$

❷ $m\widehat{NC}: m\angle CNM = \frac{1}{2} m\widehat{NC}$ الزاوية المماسية المقابلة للقوس

$82 = \frac{1}{2} m\widehat{NC}$ نعوض قيمة الزاوية

$m\widehat{NC} = 82 \times 2$ من الطرفين في الوسطين

$m\widehat{NC} = 164$

### مثال 6

جد قياس كل مما يأتي ❶ $m\angle ABC$ ❷ $m\angle NAB$ من الشكل

اثرائي

SoL

❶ $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AEB}$ مبرهنة الزوايا المماسية

$m\angle ABC = \frac{1}{2} \times 111$ نعوض قيمة القوس

$m\angle ABC = 55.5°$

❷ $m\angle NAB = \frac{1}{2} m\widehat{ADB}$ الزاوية المماسية

نجد $m\widehat{ADB}$ من خلال مجموع أقواس الدائرة الكلية ونطرح منها القوس الأخر

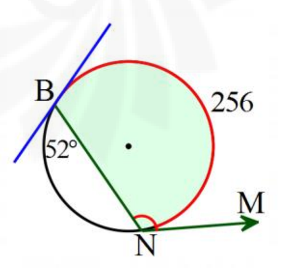
$m\angle NAB = \frac{1}{2} \times (360 - 111)$

$m\angle NAB = \frac{1}{2} \times 249$

$m\angle NAB = 124.5°$

### H.W

جد قياس كل مما يأتي ❶ $m\angle MNB$ ❷ $m\widehat{BN}$ من الشكل




ملاحظة: عندما لا يعطيك حرف ثالث في القوس نضع من عندك أي حرف مختلف لكي تسمي اسم القوس من ثلاث احرف
مثلاً: في مثال الواجب نضع حرف $C$ على القوس الأحمر لكي نسمي القوس $\widehat{BCN}$ حتى يختلف عن تسمية القوس الأسود

Ans: $m\angle MNB = 128°, m\widehat{BN} = 104$

# ثالثاً الزوايا الداخلية والخارجية في الدائرة



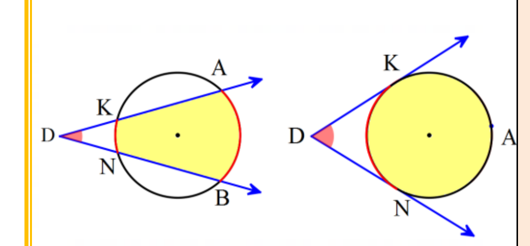

## مبرهنة الزوايا الخارجية

اذا تقاطع مستقيمان خارج الدائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين قياس القوسين المقطعين

$$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN})$$

القوس الكبير — القوس الصغير

$$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{KAN} - m\widehat{KN})$$




تنبيه: لا يجوز طرح القوس الصغير من الكبير لان الناتج يكون سالب وهذه غير ممكن

## مثال 7 جد قيمة $x$ في كل الأشكال التالية

**1** SoL

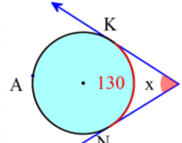



$m\angle x = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$m\angle x = \frac{1}{2}(172 - 90)$ نعوض قيم الاقواس

$m\angle x = \frac{1}{2}(82) \Longrightarrow \therefore m\angle x = 41°$

**2** SoL




نجد $m\widehat{KAN}$ من ناتج طرح مجموع الأقواس الكلية للدائرة من القوس الصغير
360 − 1

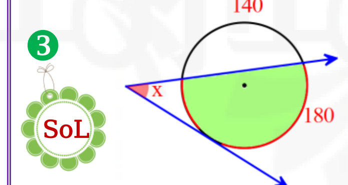
$m\angle x = \frac{1}{2}(m\widehat{KAN} - m\widehat{KN})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$m\angle x = \frac{1}{2}((360 - 130) - 130)$ نعوض قيم الاقواس

$m\angle x = \frac{1}{2}((230) - 130) \Longrightarrow m\angle x = \frac{1}{2}(100)$

$\therefore m\angle x = 50°$

**3** SoL



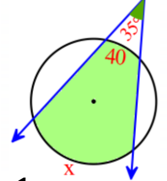

القوس الصغير $= 360 - (140 + 180)$
$= 360 - 320 = 40$
نجده من خلال مجموع الأقواس المعلومة وطرحها من مجموع أقواس الدائرة الكلية

$m\angle x = \frac{1}{2}(180 - 40)$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$m\angle x = \frac{1}{2}(140)$

$\therefore m\angle x = 70°$

**4** SoL




هنا المطلوب هو قياس القوس الكبير

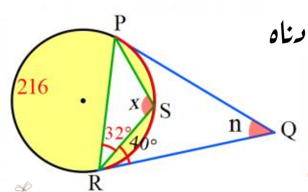
$m\angle D = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$35 = \frac{1}{2}(x - 40)$ نعوض معطيات السؤال

$\left[35 = \frac{1}{2}(x - 40)\right] \times 2 \xrightarrow{\text{نتخلص من الكسر}} 70 = x - 40$

$70 + 40 = x \Longrightarrow x = 110$

## مثال 8 جد قيم الزوايا المجهولة في الشكل ادناه




SoL

$m\widehat{RSP} = 360 - 216 = 144$

$m\angle n = \frac{1}{2}(m\widehat{RP} - m\widehat{RSP})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$m\angle n = \frac{1}{2}(216 - 144)$ نعوض قيم الاقواس

$m\angle n = 36°$

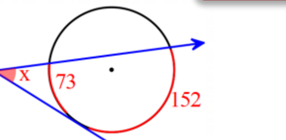
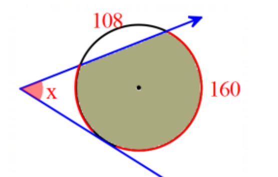
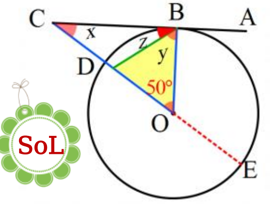
$m\angle x = \frac{1}{2}m\widehat{RP}$ مبرهنة الزوايا المحيطية

$m\angle x = \frac{1}{2} \times 216$ نعوض قيمة قوسها

$m\angle x = 108°$





**مثال 9** جد قيم الزوايا المجهولة $x, y, z$ من الشكل أدناه

SoL

$m\angle O = m\widehat{DB}$ زاوية مركزية

$50 = m\widehat{DB} \rightarrow \therefore m\widehat{DB} = 50$

$m\angle Z = \frac{1}{2} m\widehat{DB}$ مبرهنة الزوايا المماسية

$m\angle Z = \frac{1}{2} \times 50 \rightarrow \therefore m\angle Z = 25°$

$\overline{CA}$ مماس الدائرة في نقطة $B$ أذن حسب تعريف المماس تكون الزاوية $\angle B$ قائمة

$\angle B = \angle Z + \angle y \Rightarrow 90 = 25 + \angle y \Rightarrow 90 - 25 = \angle y$

$\angle y = 65°$

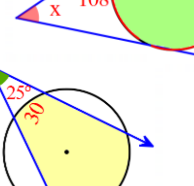
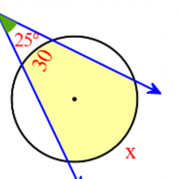
من خلال مجموع زوايا المثلث $CBO$ القائم الزاوية في

$\angle B + \angle O + \angle x = 180° \rightarrow 90° + 50° + \angle x = 180°$

$\angle x = 180° - 140° \rightarrow \angle x = 40°$

أو بطريقة ثانية نستطيع إيجاد $\angle x$ من خلال مبرهنة الزوايا الخارجية

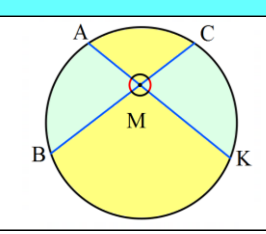
**H.W** جد قيم $x$ في كل مما يأتي من الأشكال.

1. Ans: $m\angle x = 39.5°$
2. Ans: $m\angle x = 34°$
3. Ans: $m\angle x = 72°$
4. Ans: $m\hat{x} = 80$



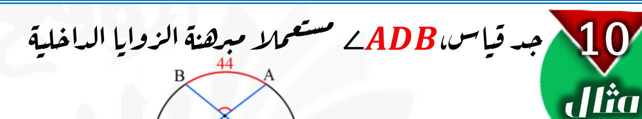
## مبرهنة 21 مبرهنة الزوايا الداخلية في الدائرة



اذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين المقطعين.

$$m\angle CMK = \frac{1}{2}(m\widehat{CK} + m\widehat{AB})$$

وبنفس القانون لبقية الزوايا $m\angle AMB, m\angle BMK, m\angle AMC$ مع ملاحظة تبديل الأقواس **تذكير:** الزوايا المتقابلة بالرأس متساوية بالقياس



**مثال 10** جد قياس $\angle ADB$ مستعملا مبرهنة الزوايا الداخلية

SoL

$m\angle ADB = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{NK})$ مبرهنة الزوايا الداخلية

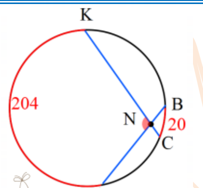
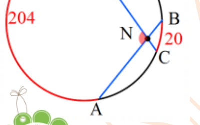
$m\angle ADB = \frac{1}{2}(44 + 102)$ نعوض قيم الاقواس

$m\angle ADB = \frac{1}{2}(146)$

$m\angle ADB = 73°$



**مثال 11** جد قياس $\angle KNA$ من الشكل المجاور

SoL

$m\angle KNA = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} + m\widehat{KA})$ مبرهنة الزوايا الداخلية

$m\angle KNA = \frac{1}{2}(20 + 204)$ نعوض قيم الاقواس

$m\angle KNA = \frac{1}{2}(224)$

$m\angle KNA = 112°$

**H.W** جد قياس $\angle HBC$ من الشكل المجاور

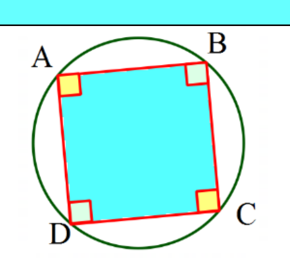
Ans: $m\angle HBC = 68.5°$




يمكن إيجاد دائرة تمر في الرؤوس الأربعة لرباعي ويسمى هذا الرباعي بالرباعي الدائري .

## مبرهنة الرباعي الدائري




في كل رباعي دائري مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين يساوي $180°$

$m\angle A + m\angle C = 180°$ , $m\angle B + m\angle D = 180°$

تذكير: الزوايا المتجاورة مجموعها قياساتها $180°$

### مثال 12 جد قيمة $x, a$ في الشكل المجاور




SoL

مبرهنة الرباعي الدائري

$a + 81° = 180°$

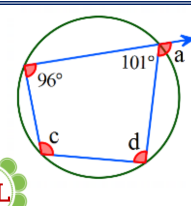
$a = 180° - 81° \Longrightarrow a = 99°$

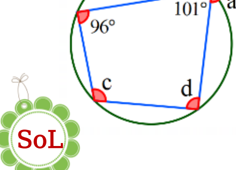
مبرهنة الرباعي الدائري

$2x + x = 180°$

$3x = 180° \overset{\div 3}{\Longrightarrow} x = 60°$

### مثال 14 جد قياس الزوايا المجهولة في الشكل




نسمي الزاوية المتجاورة مع $101°$ باسم $a$

زوايا متجاوره

$a + 101° = 180°$

$a = 180° - 101° \Longrightarrow a = 79°$

مبرهنة الرباعي الدائري

$c + 101° = 180°$

$c = 180° - 101° \Longrightarrow c = 79°$

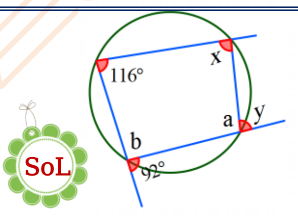
مبرهنة الرباعي الدائري

$d + 96° = 180°$

$d = 180° - 96° \Longrightarrow d = 84°$



### مثال 13 جد $m\angle x, m\angle y$




نسمي الزاوية المتجاورة مع $y$ باسم $a$

و نسمي الزاوية المتجاورة مع $92°$ باسم $b$

مبرهنة الرباعي الدائري

$a + 116° = 180°$

$a = 180° - 116° \Longrightarrow a = 64°$

زوايا متجاوره

$a + y = 180°$

$64 + y = 180° \Longrightarrow y = 180° - 64$

$y = 116°$

زوايا متجاوره

$b + 92° = 180°$

$b = 180° - 92° \Longrightarrow b = 88°$

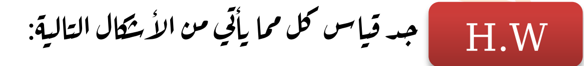
مبرهنة الرباعي الدائري

$b + x = 180°$

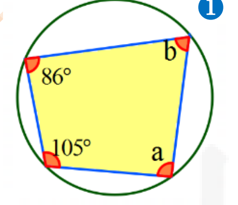
$88° + x = 180° \Longrightarrow x = 180° - 88°$

$x = 92°$

### H.W جد قياس كل مما يأتي من الأشكال التالية:



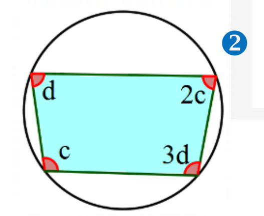
1






Ans: $m\angle a = 94°, m\angle b = 75°$

2






Ans: $m\angle c = 60°, m\angle d = 45°$

الاهتمام لا يكلف شيء

لكن يعني الكثير

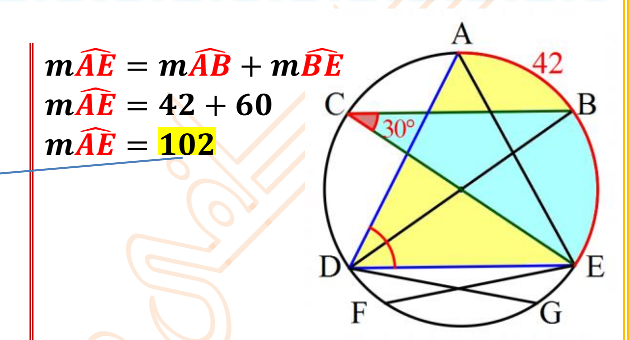





## مسائل حياتية

❶ **زجاج:** رسم احد الفنانين الرسم أدناه على الزجاج، جد قياس $\angle ADE$ اذا علمت أن $\angle BEC = 30°$ وقياس $\widehat{AB} = 42$

**SoL**




$m\widehat{AE} = m\widehat{AB} + m\widehat{BE}$

$m\widehat{AE} = 42 + 60$

$m\widehat{AE} = 102$

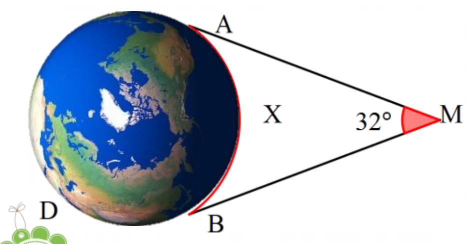
$m\angle BEC = \frac{1}{2} m\widehat{BE}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

$30 = \frac{1}{2} m\widehat{BE} \xrightarrow{\text{طرفين في وسطين}} m\widehat{BE} = 30 \times 2 \Rightarrow m\widehat{BE} = 60$

$m\angle ADE = \frac{1}{2} m\widehat{AE}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

$m\angle ADE = \frac{1}{2} \times 102 \Longrightarrow m\angle ADE = 51°$

❷ **فضاء:** قمر صناعي يدور حول الأرض عندما يصل النقطة $M$ يكون على ارتفاع $14000km$ فوق الأرض ما قياس القوس الذي يمكن رؤيته من كاميرا القمر الصناعي على الأرض؟




**SoL**

$m\widehat{ADB} = 360 - x$

مجموع أقواس الدائرة مطروح منها القوس الصغير

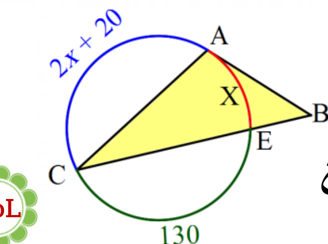
$m\angle M = \frac{1}{2}(m\widehat{ADB} - m\widehat{AB})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$32 = \frac{1}{2}((360 - x) - x)$ نعوض قيمة الاقواس

$\left[32 = \frac{1}{2}(360 - 2x)\right] \times 2 \Longrightarrow 64 = 360 - 2x$

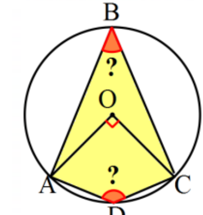
$2x = 360 - 64 \Longrightarrow 2x = 296 \xrightarrow{\div 2} x = 148$








كتب سعيد، $m\angle CAB = \frac{160°}{2} = 80°$ بين الخطأ و أوجد الجواب الصحيح







نجد قيمة $x$ من خلال مجموع أقواس الدائرة الكلية

$2x + 20 + x + 130 = 360 \Rightarrow 3x + 150 = 360$

$3x = 360 - 150 \Rightarrow 3x = 210 \xrightarrow{\div 3} x = 70$

$\therefore m\widehat{AC} = 160 \quad , \quad m\widehat{AE} = 70$

$m\angle CAB = \frac{1}{2} m\widehat{AEC}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

$\therefore m\angle CAB = \frac{1}{2}(m\widehat{AE} + m\widehat{EC})$

$m\angle CAB = \frac{1}{2}(70 + 130)$

$m\angle CAB = \frac{1}{2}(200)$

$m\angle CAB = 100°$

أذن الجواب الصحيح هو، $m\angle CAB = 100°$







جد قيمة الزوايا المجهولة في الشكل المجاور:

SoL

$m\angle O = m\widehat{AC}$ مبرهنة الزاوية المركزية

$90 = m\widehat{AC} \Rightarrow \therefore m\widehat{AC} = 90$

$m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

$m\angle B = \frac{1}{2} \times 90 \Longrightarrow m\angle B = 45°$

من الشكل الرباعي، $ABCD$ نجد، $m\angle D$

$m\angle B + m\angle D = 180°$ مبرهنة الشكل الرباعي الدائري

$45 + m\angle D = 180°$

$m\angle D = 180° - 45° \Longrightarrow m\angle D = 135°$

ثالثاً اكتب

مبرهنات الزوايا الداخلية والخارجية لتقارن بين الزاويتين $x, y$

SoL

$m\angle y = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} - m\widehat{ED})$ مبرهنة الزوايا الخارجية

$m\angle x = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} + m\widehat{ED})$ مبرهنة الزوايا الداخلية

$m\angle x + m\angle y = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} + m\widehat{ED} + m\widehat{BC} - m\widehat{ED}) = \frac{1}{2}(2m\widehat{BC}) = m\widehat{BC}$

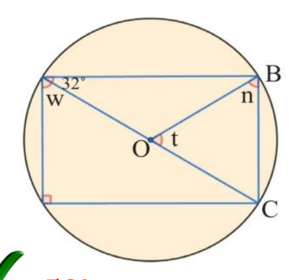
$m\angle x - m\angle y = \frac{1}{2}(m\widehat{BC} + m\widehat{ED} - m\widehat{BC} + m\widehat{ED}) = \frac{1}{2}(2m\widehat{ED}) = m\widehat{ED}$

نلاحظ ان جمعهما يساوي القوس الكبير $\widehat{BC}$ وطرحهما يساوي القوس الصغير $\widehat{ED}$

الدرس [5-6] الزوايا والدائرة

## Angles and Circle

### انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (1-3):




1 قياس الزاوية W هو:

a) 58°   b) 30°   c) 90°   d) 32°

2 قياس الزاوية t هو:

a) 45°   b) 64°   c) 32°   d) 48°

3 قياس الزاوية n هو:

a) 45°   b) 64°   c) 32°   d) 58°

### انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (4-6):




4 قياس الزاوية h هو:



a) 70°   b) 72°   c) 90°   d) 80°

5 قياس الزاوية i هو:

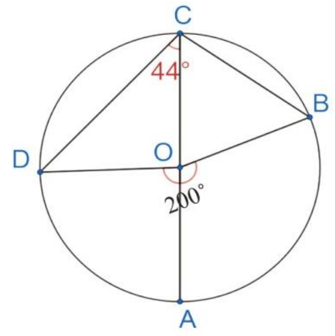
a) 39°   b) 70°   c) 40°   d) 45°

6 قياس الزاوية k هو:

a) 70°   b) 30°   c) 40°   d) 78°

### انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للسؤال (7):

7 قياس القوس $\overset{\frown}{AB}$ هو:




a) 112   b) 28   c) 65   d) 82




## خطة حل المسألة (الرسم)

في هذه الدرس نستخدم اربع خطوات للحل وهي أفهم، خطط، حل، تحقق

**مثال** حل المسائل التالية بأستعمال استراتيجية الرسم.

❶ **شعبة:** لكل شعبة من شعب الصف الثالث متوسط مقاعد دراسية متساوية وكان في الشعبة (أ) الطالب ياسر يجلس في المقعد الرابع من الامام وفي المقعد الثاني من الخلف والمقعد الخامس من اليسار و الثاني من اليمين ارسم شكلاً لايجاد عدد المقاعد في الشعبة (أ) التي يجلس فيها ياسر.




ما معطيات المسألة؟ مقعد ياسر هو الرابع من الامام والثاني من الخلف و الخامس من اليسار و الثاني من اليمين

ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد عدد المقاعد في الشعبة (أ) التي يجلس فيها ياسر

ملاحظة: للسهولة نجمع عدد المقاعد من الأمام وعددها من الخلف و ننقص منها واحد فيكون الناتج هو عدد المقاعد في الصفوف. وبنفس الطريقة مع الاعمدة




كيف تحل المسألة؟ ارسم شكلاً يبين الصفوف والاعمدة اعتماداً على موقع جلوس ياسر.

**حلّ**

نكون رسم من 6 أعمدة و 5 صفوف من المقاعد

فيكون عدد المقاعد في الشعبة

$6 \times 5 = 30$ مقعد

الأمام
اليسار
اليمين
الخلف




من خلال الرسم أعلاه وحسب موقع ياسر في المعطيات

أذن يكون الحل صحيح وهو 30 مقعد في الشعبة






❷ **مسرح**: مسرح قسّم على عدة اقسام، جلس انمار في الصف الرابع من الامام وفي الصف السادس من الخلف وكان مقعده الثاني من جهة اليسار و السادس من جهة اليمين، فما عدد المقاعد في هذه القسم من المسرح

**إفهم**

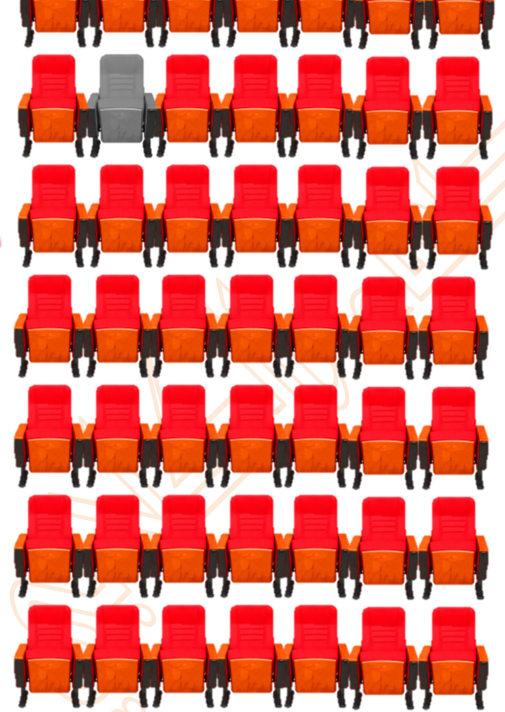
**ما معطيات المسألة؟** مقعد انمار هو الرابع من الامام والسادس من الخلف و الثاني من اليسار و السادس من اليمين

**ما المطلوب من المسألة؟** إيجاد عدد المقاعد في هذه القسم من المسرح

**خطط**

**كيف تحل المسألة؟** ارسم شكلاً او (مربعات فارغة) يبين الصفوف والاعمدة اعتماداً على موقع جلوس انمار.

**حلّ**




نكون رسم من 7 أعمدة و 9 صفوف من المقاعد

فيكون عدد المقاعد في المسرح

$9 \times 7 = 63$ مقعد

**تحقق**



من خلال الرسم أعلاه وحسب موقع انمار في المعطيات

أذن يكون الحل صحيح وهو 63 مقعد في المسرح






❸ **خزان:** خزان ماء سعته 500 لتر يُصب فيه الماء بمقدار 80 لتر كل 6 دقائق

ماعدد الدقائق اللازمة لملء الخزان؟

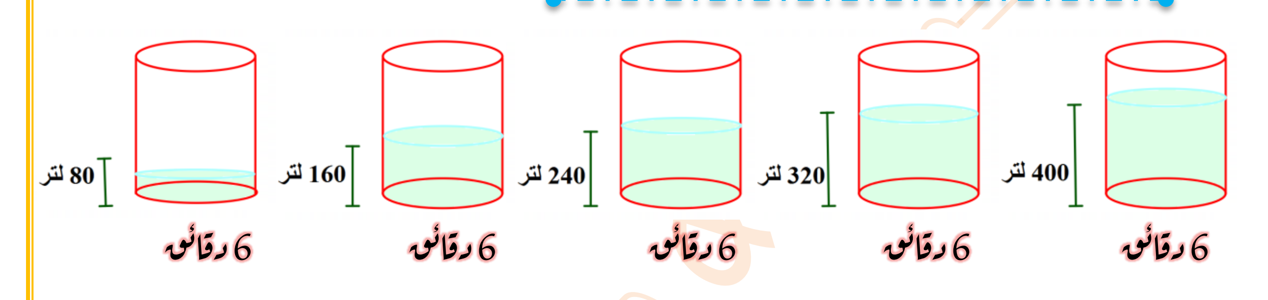


**ما معطيات المسألة؟** خزان ماء سعته 500 لتر يُصب فيه الماء بمقدار 80 لتر كل 6 دقائق

**ما المطلوب من المسألة؟** ماعدد الدقائق اللازمة لملء الخزان؟

**كيف تحل المسألة؟** نقسم سعة الخزان 500 على 80 المقدار الذي يُصب فيه. ثم نضربه ب 6 عدد الدقائق لكل لتر صُب في الخزان







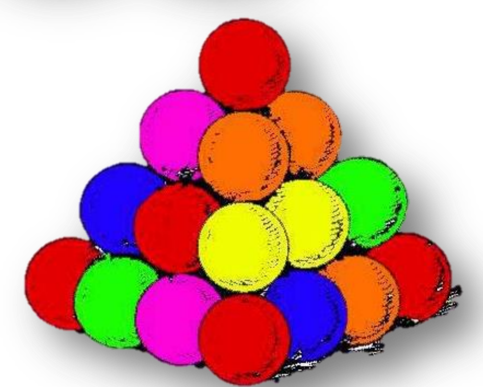


$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 1.5 = 37.5$ دقيقة



$\frac{500}{80} \times 6 = 6.25 \times 6 = 37.5$ دقيقة

أذن الحل صحيح



❹ **هرم رباعي:** تم تشكيل هرم رباعي القاعدة باستعمال كرات صغيرة كما في الشكل المجاور

اذا كان الهرم مكوناً من اربع طبقات ، ماعدد كرات الهرم؟

**إفهم**

**ما معطيات المسألة؟** هرم رباعي القاعدة

**ما المطلوب من المسألة؟** ماعدد كرات الهرم؟



**خطط**



**كيف تحل المسألة؟** نرسم كرات كل طبقة ثم نحسب عددها

**حل**



16 كرة



9 كرات



4 كرات



كرة واحدة

$16 + 9 + 4 + 1 = 30$ كرة

**تحقق**



$(4 \times 4) + (3 \times 3) + (2 \times 2) + 1 = 30$ كرة

أذن الحل صحيح



❺ قص قطعة خشب: يستغرق قص قطعة من الخشب الى 5 قطع متساوية 20 دقيقة مالزمن اللازم لقص قطعة اخرى مشابهة الى 3 قطع متساوية؟

**إفهم**

ما معطيات المسألة؟ يستغرق قص قطعة من الخشب الى 5 قطع متساوية 20 دقيقة

ما المطلوب من المسألة؟ مالزمن اللازم لقص قطعة اخرى مشابهة الى 3 قطع متساوية؟

**خطط**

كيف تحل المسألة؟ نحتاج الى اربع مرات لقطع الخشبة لتكوين خمس قطع لان القطعة الخامسة لا تحتاج الى قص لذلك سيكون زمن القص مقسوم على 4 فيكون الزمن $\frac{20}{4} = 5$ دقائق لكل قطعة

ثم نكمل قص القطعة الثانية الى 3 قطع بمعدل 5 دقائق

**حلّ**



| لا تحتاج الى وقت | 5 دقائق | 5 دقائق |
|---|---|---|

$5 + 5 = 10$ دقائق

**تحقق**



وللتحقق نضرب عدد الدقائق لكل قطعة في قطعتين

$5 \times 2 = 10$ دقيقة

أذن الحل صحيح

# الفصلُ 6

## الاحصاء والاحتمالات

## Statistics and Probabilities





مصانع السيارات عادة قبل طرح انتاجها في الاسواق تتحقق من عدة أمور لضمان الجودة، منها متانة محرك السيارة، جودة كهربائيات السيارة، الالوان والامور التصميمية كمصابيح السيارة وغير ذلك.

# الدرس (6 – 1) تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين الاول تصميم دراسه مسحية و الثاني تحليل النتائج

## اولاً تصميم دراسه مسحية: وهو تعين مشكله او سؤال ثم نحدد مجتمع نبحث من خلاله عن الاجابات

**العينة:** هي مجموعة جزئية من المجتمع ومن خلال تحليل نتائج العينة يمكن التوصل الى استنتاجات حول المجتمع كاملاً.

وتكون الاستنتاجات اكثر تمثيلاً للمجتمع اذا كانت **حجم العينة اكبر** و **استعمال عينات اكثر**

ولنوع العينة تأثير في الاستنتاجات التي نتوصل اليها وهي على نوعين:

1. **العينة المتحيزه:** اذا كان لافرادها الاحتمالات نفسها في الاختيار ( كلهم متحيزين لمكان مُعين او اكله مُعينه او نادي مُعين ... )
2. **العينة الغير متحيزه:** اذا كان لافرادها احتمالات مختلفة في الاختيار.

**مثال 1** وزع مدير مدرسة 100 ورقة استبيان على طلاب مدرسته للتعرف على جودة المواد الغذائية في الحانوت.

❶ حدد العينه والمجتمع الذي اختير منه ❷ صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير ❸ حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

**الجواب**

❶ **العينة:** الطلاب الذي استلموا اوراق الاستبيان وعددهم 100 طالب \\ **المجتمع:** جميع طلاب المدرسة

❷ **اسلوب جمع البيانات:** هو دراسة مسحية حيث تؤخذ الاجابات مباشرةً الى الاستبانه.

❸ **العينة غير متحيزه:** لان هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائياً

---

**مثال 2** يريد صاحب متجر ان يقدم هدية لكل زبون يتسوق منه. فوقف عند باب المتجر وسأل 20 متسوقاً عن نوع الهدية التي يود ان تقدم له

❶ حدد العينه والمجتمع الذي اختير منه ❷ صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير ❸ حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

**الجواب**

❶ **العينة:** المتسوقون الذي سئلهم وعددهم 20 شخص \\ **المجتمع:** جميع المتسوقون الذي دخلوا المتجر

❷ **اسلوب جمع البيانات:** هو دراسة مسحية حيث تؤخذ الاجابات مباشرةً من افراد العينه المختاره.

❸ **العينة غير متحيزه:** لان الاشخاص الذي دخلوا اختيروا عشوائياً






**مثال 3** سُئل 10 اشخاص دخلوا مطعم كباب عن الاكلات التي يفضلونها

❶ حدد العينه والمجتمع الذي اختير منه ❷ صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير ❸ حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

**الجواب**

❶ **العينة:** الاشخاص الذي طُرح عليهم السؤال وعددهم 10 \\ **المجتمع:** جميع الاشخاص الذي دخلوا المطعم

❷ **اسلوب جمع البيانات:** هو دراسة مسحية حيث تؤخذ الاجابات مباشرةً من افراد العينه المختاره.

❸ **العينة متحيزه:** لان الاشخاص الموجودين داخل مطعم الكباب اكلتهم المفضله هي الكباب

---

**مثال 4** دخل 30 شخص مكتبة عامه وسُئل كل سادس شخص يدخل المكتبة عن هوايته المفضله.

❶ حدد العينه والمجتمع الذي اختير منه ❷ صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير ❸ حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

**الجواب**

❶ **العينة:** الاشخاص الذي طُرح عليهم السؤال وعددهم $5 = \frac{30}{6}$ \\ **المجتمع:** جميع الاشخاص الذي دخلوا المكتبة وعددهم 30

❷ **اسلوب جمع البيانات:** هو دراسة مسحية حيث تؤخذ الاجابات مباشرةً من افراد العينه المختاره.

❸ **العينة متحيزه:** لان جميع الاشخاص الذي دخلوا المكتبة هواياتهم المفضله هي القراءه

---

**مثال 5** طلب من كل عاشر زائر من بين 3000 زائر لحديقة الزوراء في احد الايام ان يجيب عن سؤال معين

❶ حدد العينه والمجتمع الذي اختير منه ❷ صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير ❸ حدد العينة متحيزه ام غير متحيزه

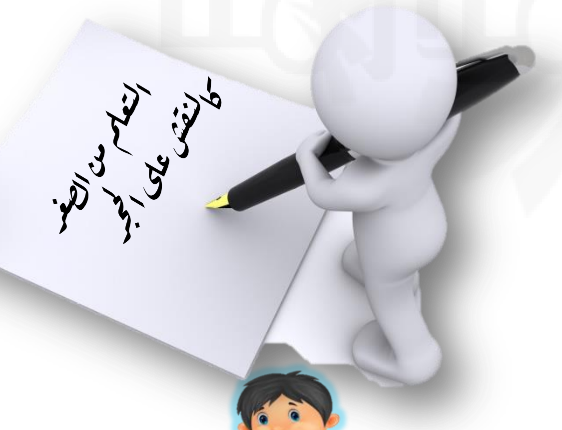
**الجواب**

❶ **العينة:** الاشخاص الذي طُرح عليهم السؤال وعددهم $300 = \frac{3000}{10}$ \\ **المجتمع:** جميع الاشخاص الموجودين وعددهم 3000

❷ **اسلوب جمع البيانات:** هو دراسة مسحية حيث تؤخذ الاجابات مباشرةً من افراد العينه المختاره.

❸ **العينة غير متحيزه:** لان العينة اختيرت بصوره عشوائية

---






H.W: حدد العينة و المجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميز العينة المتحيزه عن العينة غير المتحيزه لكل مماياتي.

1. وزعت 100 ورقة استبيان على مجموعة من عمال احد المصانع تتضمن سؤال حول ظروف العمل في العمل.\ ج (غير متحيزه)
2. وزع استبيان على 30 طالب من بين 100 طالب. ج\ (غير متحيزه)
3. وزعت الحيوانات في احدى حدائق الحيوان ثم اختير حيوان من كل مجموعة بصوره عشوائية لأجراء فحوصات علية. ج (غير متحيزه)
4. يريد صاحب معمل التحقق من ان العمال يعملون بشكل جيد فراقب احد العمال مدة ساعتين. ج (متحيزه)
5. يقف عدد من الطالبات عند مدخل المدرسة ويسألن كل عاشر طالبة تدخل المدرسة عن هوايتها المفضله. ج (غير متحيزه)
6. اختار مدير مدرسة 20 طالباً يمثلون المدرسة في مسابقة علمية. ج (غير متحيزه)

## ثانياً تحليل النتائج:

بعد جمع البيانات من خلال تادراسة المسحية تلخص البيانات كي تكون ذات معنى وذلك عن طريق استعمال مقاييس النزعه المركزيه التي درستها سابقاً (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) بطرق مختلفة

**الوسط الحسابي**: نرمز له بالرمز $\bar{X}$ وهو مجموع القيم على عددها $\bar{X} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

**الوسط**: ونرمز له بالرمز ME: نرتب البيانات تصاعدياً اوتنازلياً 1 اذا كان عدد العناصر فردي فيكون القيمة الذي تقع في المنصف
2 اذا كان عددها زوجي فيكون القيمتين في المنصف مقسومتين على 2 .

**المنوال**: هي القيمة الاكثر تكراراً.

وان اختيار المقياس الانسب لتمثيل البيانات هو حسب الظروف الموضحه في الجدول ادناه:

| المقياس | متى يفضل استعمالة |
|---|---|
| الوسط الحسابي | عندما لاتوجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات |
| الوسيط | عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات بشرط لاتوجد فجوات كبيره في وسط البيانات |
| المنوال | عندما توجد اعداد متكرره في مجموعة البيانات |

**ملاحظات:**

**القيم المتطرفة**: هي القيمة الشاذه بين مجموعة القيم مثل وجود ال 50 بين الاعداد التالية 1,2,3,50,8,9

**الفجوات الكبيرة**: عندما ترتب القيم تصاعديا او تنازلي يجب ان لايكون انقطاع كبير بين بداية البيانات والنهاية مثل 1,2,150,250,500

فجوه كبيره



**مثال 6** اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هي الانسب لوصف البيانات في كل ممايأتي:

❷ 8, 10, 8, 9, 11, 4, 6, 4, 54

**الجواب** نرتب البيانات تصاعدياً
4, 6, 8, 8, 9, 10, 11, 54

**الوسط الحسابي:** غير مناسب لوجود قيمة متطرفه 54

**الوسيط:** هو المقياس المناسب لوجود قيمة متطرفة ولا توجد فجوات ويساوي $8.5 = \frac{8+9}{2}$ \ لانه عدد القيم زوجي

**المنوال:** يساوي 8 وهو ايضاً مقياس مناسب لتمثيل البيانات

❶ 3, 2, 3, 6, 5, 5, 21, 4, 3, 5

**الجواب** نرتب البيانات تصاعدياً
2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 21

**الوسط الحسابي:** غير مناسب لوجود قيمة متطرفه 21

**الوسيط:** هو المقياس المناسب لوجود قيمة متطرفة ولا توجد فجوات ويساوي $4.5 = \frac{4+5}{2}$ \ لانه عدد القيم زوجي

**المنوال:** غير مناسب لوجود قيمتين 3,5 بنفس التكرار

❸ حصل محمد على الدرجات التالية في خمسة اختبارات لمادة الرياضيات: 91, 86, 85, 93, 90

**الجواب** نرتب البيانات تصاعدياً 85, 86, 90, 91, 93

**الوسط الحسابي:** مناسب لعدم وجود قيم متطرفه: $89 = \frac{445}{5} = \frac{85+86+90+91+93}{5} = \bar{X}$

**الوسيط:** يساوي 90 وهو مقياس مناسب ايضاً لتمثيل البيانات لانه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيره

**المنوال:** لا يوجد لعدم وجود تكرار في البيانات

**H.W:** اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هي الانسب لوصف البيانات في كل ممايأتي:

❶ 8, 10, 14, 8, 13, 6

❷ 8, 9, 8, 6, 10, 9, 11, 13, 14, 8, 6, 7, 19

❸ 34, 47, 41, 49, 39, 26, 40

❹ 6, 2, 4, 4, 3, 2, 6, 2, 4, 4, 20

❺ 5, 3, 5, 8, 5, 3, 6, 7, 4, 5

❻ في سباقات العدو التي تضمها وزارة الشباب والرياضه حقق احد المتسابقين خلال عشر سنوات المراكز التالية.
2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 10






## تدرب وحل المسائل الحياتية

❶ **مستشفى:** يعد مشفى مدينة الطب مجمعاً طبياً متكاملاً يقدم خدمات للمواطنين في بغداد والمحافظات في ندوة تعرفية يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائياً ليقدم نبذه عن خدمات قسمة في المستشفى. ① صف العينة وا المجتمع ② هل العينه متحيزه ام لا فسر



**الجواب**

① **العينة:** طبيب واحد من كل قسم \\ **المجتمع:** جميع الاطباء في مستشفى مدينة الطب

② **العينةغير متحيزه:** لان الاختيار كان بصوره عشوائيه

❷ **تسوق:** يبين الجدول ادناه عدد الزبائن الذين يرتادون محل لبيع الاجهزه الكهربائيه في كل ساعه في احد الايام.

اي مقاييس النزعة المركزية هو الانسب لوصف البيانات

| عدد الزبائن | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 79 | 71 | 86 | 86 | 86 |
| 88 | 32 | 79 | 86 | 86 |
| 71 | 69 | 82 | 70 | 86 |



**الجواب**

نرتب البيانات تصاعدياً 32, 69, 70, 71, 71, 79, 79, 81, 82, 85, 86, 86, 86, 86, 86, 88

**الوسط الحسابي:** غير مناسب لوجود قيمة متطرفه 32

**الوسيط:** هو المقياس المناسب لوجود قيمة متطرفة ولا توجد فجوات ويساوي $\frac{81+82}{2} = 81.5$

**المنوال:** يساوي 86 لانها تكررت 5 مرات وهو ايضاً مقياس مناسب لتمثيل البيانات

❸ **تغذية:** يبين الجدول ادناه السعرات الحرارية لبعض الخضروات في طبق لكل نوع. اي مقاييس النزعة المركزية هو الانسب لوصف البيانات

| الخضروات | السعرات | الخضروات | السعرات |
|---|---|---|---|
| بصل | 16 | خيار | 13 |
| فلفل | 20 | ذره | 66 |
| ملفوف | 17 | سبانخ | 9 |
| جزر | 28 | كوسا | 17 |



**الجواب**

نرتب البيانات تصاعدياً 9, 13, 16, 17, 17, 20, 28, 66

**الوسط الحسابي:** غير مناسب لوجود قيمة متطرفه 66

**الوسيط:** هو المقياس المناسب لوجود قيمة متطرفة ولا توجد فجوات ويساوي $\frac{17+17}{2} = 17$

**المنوال:** يساوي 17 لانها تكررت مرتين وهو ايضاً مقياس مناسب لتمثيل البيانات






## فكر

**اولاً تحدٍ** اوجد مجموعة من الاعداد يكون وسيطها اصغر من وسطها الحسابي:

**الجواب** نفرض الاعداد هي 4,6,7,13,20

الوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{4+6+7+13+20}{5} = \frac{50}{5} = 10$ \\ الوسيط: يساوي 7

اذن وسيطها اكبر من وسطها

**ثانياً اصحح الخطأ** قالت سناريا ان الوسط الحسابي هو انسب مقاييس النزعه المركزية لتمثيل البيانات 20,8,4,5,3

حدد خطأ سناريا وصححه

**الجواب** نرتب الاعداد تصاعديا 3,4,5,8,20

الوسط الحسابي: غير مناسب لوجود قيمة متطرفه 20

الوسيط: هو المقياس المناسب لوجود قيمة متطرفة ولا توجد فجوات ويساوي 5

المنوال: لايوجد لعدم وجود بيانات متكرره \\ ✓ اذن انسب المقاييس هو الوسيط وليس ✗ الوسط الحسابي

**ثالثاً حس عددي** في دراسه مسحيه حول الدوام في مدرسة ثانوية وزعت استبانه على 50 طالباً، فكانت نسبة 74% من الطلاب يفضلون الدوام الصباحي. هل هذه الدراسه موثوق بها ؟ بين ذلك

**الجواب** دراسة غير موثوق بها لان 50 طالب من مدرسة ثانوية عينة قليلة

**رابعاً اكتب** سؤالاً عن معنى تريد اجابته من خلال دراسة مسحية

**الجواب** اخذ مدرس الرياضيات 10 طلاب من طلاب الصف الثالث متوسط وسئلهم عن رأيهم في طريقة تدريسه

## الاختيارُ من متعدد Multiple Choice

### الدرس [6-1] تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

### Design a Survey Study and Analysis its Results

**اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:**

1 أي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت)؟ هو الانسب للبيانات التالية:

8, 8, 12, 11, 15, 15, 16, 21, 23, 27, 31, 70.

a) المدى    b) المنوال ✓    c) الوسيط    d) الوسط الحسابي

2 أي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت)؟ هو الانسب للبيانات التالية:

2, 3, 4, 5,6, 7.

a) المدى    b) المنوال    c) الوسيط ✓    d) الوسط الحسابي

3 أي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت)؟ هو الانسب للبيانات التالية:

18, 1, 3, 16, 23, 3, 2.

a) المدى    b) المنوال    c) الوسيط ✓    d) الوسط الحسابي

4 المدى للبيانات الآتية: 18, 22, 24, 32, 18, 24 هو:

a) 18    b) 32    c) 14 ✓    d) 50

5 اي المقياس ليس من مقاييس النزعة المركزية؟

a) المدى ✓    b) المنوال    c) الوسيط    d) الوسط الحسابي

6 القيمة المتطرفة لهذه البيانات: 3 ,5 ,5 ,6 ,5 ,5 ,3 ,30 ,4

a) 3    b) 5    c) 5    d) 30 ✓

7 يكون الوسيط هو انسب مقاييس النزعة المركزية للبيانات التي:

a) توجد قيم متطرفة توجد فجوات كبيرة وسطها    b) لاتوجد قيم متطرفة لاتوجد فجوات كبيرة وسطها    c) توجد قيم متطرفة لاتوجد فجوات كبيرة وسطها ✓    d) لاتوجد قيم متطرفة توجد فجوات كبيرة وسطها




## الدرس (6 – 2) البيانات والاحصاءات المضّلله

سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين الاول البيانات المضلله و الثاني الاحصاءات المضلله

### اولاً تمييز البيانات المضّلله:

**البيانات المضلله (الكاذبه ، الخادعه):** هي الرسوم البيانيه التي تبرز صفه معينه لسلعه على نحو مبالغ فيه وعرض الحقائق بشكل يولد لدى الناظر انطباعاً يروق لصاحب الاعلان وتضلل المستهلك

**كيف نميز بين الرسم البياني المضلل وغير المضلل:** يكون مضلل اذا كانت

❶ اذا كانت الفترات لا تبدء من الصفر ❷ اطوال الفترات غير ثابته ❸ طول الاعمده لا يتناسب مع القيم العددية الذي تمثلها

**مثال 1** يفكر صاحب مصنع تطبيق نظام جديد في العمل فوزع استبانه على العمال يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.

هل التمثيل البياني بالاعمدة المجاور يعطي الصوره الصحيحه حول نتائج الاستبانه؟

النظام الجديد للعمل

عدد العمال: 0، 100، 200، 225، 250، 275، 300

موافق جداً، موافق، ممتنع، غير موافق، غير موافق جداً

**الجواب**

يبدو من النظره الاولى ان معظم العمال الموافقون هم الاغلب ولكن عند جمع العمال الموافقون مع الموافقون جدا لا صبح العدد 400 عامل وعند جمع العمال الغير موافقون والغير موافقون جدا لا صبح العدد 450 عامل

لذلك يكون التمثيل البياني غير صحيح ومضلل لان اطوال الفترات غير ثابت

**مثال 2** الرسم البياني المجاور يوضح العلاقة بين طولي القرش البيضاء الكبيره وطول سمكه القرش ماكو. بين هل الرسم البياني مضلل؟ وضح ذلك




**الجواب**

من الشكل المجاور نلاحظ ان العمود العلوي هو ضعف العمود السفلي ولكن عندما نقارن بين قيمهم فيكون العمود العلوي قيمته 4.9 و العمود السفلي 4 وهذه لا يدل على الضعف.

اذن الرسم البياني مضلل وغير حقيقي لان القيم لم تبدء من الصفر






**مثال 3** وضح كيف يمكن ان يولّد الرسم البياني المجاور انطباعاً مضللاً؟

اطوال الطلاب بالسنتمترات
عدد الطلاب
20
16
12
8
4
150 157 170 175 183

**الجواب** التضليل هو ان الفترات لم تبدء من الصفر و اختلاف الفترات بين قيم البيانات

حيث الفترة الاولى $150 - 157$ والفرق بينهما هو $7cm$

الفترة الثانية $157 - 170$ والفرق بينهما هو $13cm$

الفترة الثالثة $170 - 175$ والفرق بينهما هو $5cm$

الفترة الرابعة $175 - 183$ والفرق بينهما هو $8cm$

اذن الفترة الثاني تضمن اكثر عدد من اطوال الطلاب فمن الطبيعي ان يكون عمودها اطول الاعمدة.

**مثال 4** وضح كيف يمكن ان يولّد الرسم البياني المجاور انطباعاً مضللاً؟

| | |
|---|---|
| | 100 = |
| | 50 = |
| | 20 = |

**الجواب** من النظرة الاولى نلاحظ ان عدد طفاة الحريق في عمود الاعداد هو ضعف عدد الصناديق

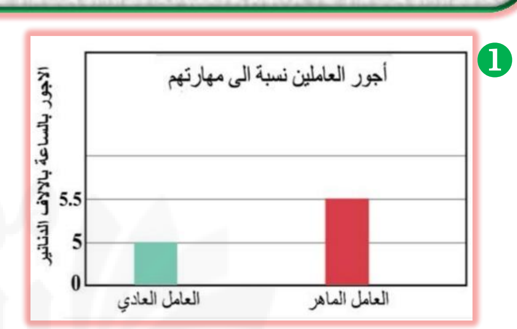
ولكن عندما ننظر الى عمود الاشكال نلاحظ ان عدد الصناديق 5 وعدد المطفاة 6

وهذا لا يدل على الضعف وعدد المطفاة 5 اضعاف من الكرات بينما عدد اشكال المطفاة 6 و الكرات 4

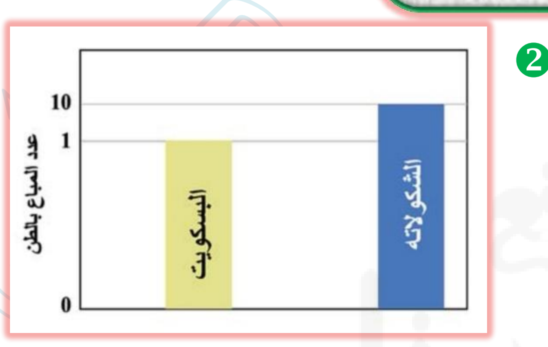
لان النسب متفاوتة بين الاعداد والاشكال اذن الرسم يشكل تضليل

**H.W:** وضح كيف يمكن ان يولّد الرسم البياني المجاور انطباعاً مضللاً؟

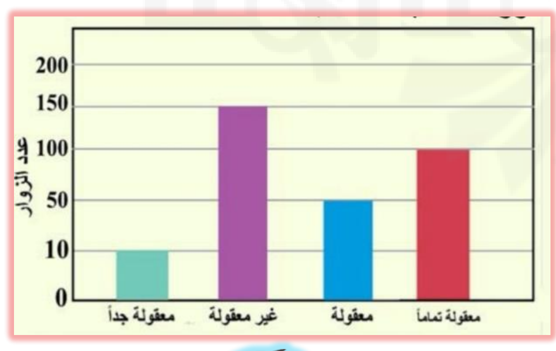
❶




❷




❸ سئل 200 زائر حول اسعار بطاقات الدخول للمسرح ومثلت الاجابات بالاعمدة هل التمثيل التالي يعطي الصوره الصحيه للاجابات؟






## ثانياً تمييز الاحصاءات المضللة:

**الاحصاءات المضللة (الكاذبة، الخادعة)**: بالاضافة الى الرسوم المضللة تستعمل الاحصاءات المضللة لهدف ترويج لشركة او لبضاعة معينة ولكن بعد امعان النظر جيداً في معطيات الاعلان يمكن ان نميز الاحصاءات المظللة.

**كيف نميز الاحصاءات المظللة.** تكون الاحصاءات مظللة اذا:

❶ كانت عدد العينات المأخوذة من المجتمع قليلة ❷ كانت المقارنة مع اشياء ليس من نفس الصنف (مثلاً: مقارنة الدولة مع الجلاق....)

### مثال 5 فسر لماذا الاحصاءات او الاعلانات التالية مضللة:

❶ وضع صاحب محل للملابس الرجالية الاعلان التالي: "بدلات رجالية متوسط سعرها 45 الف دينار"

في المحل 5 نماذج من البدلات اسعارها بالاف 54,50,20,48,53

**الجواب** نجد معدل ال5 بدلات بواسطة الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{54+50+20+48+53}{5} = \frac{225}{5} = 45$

اذن متوسط اسعار البدلات هو 45 الف دينار. ولكن هناك بدلة واحدة سعرها 20 الف وهو اقل من متوسط القيمة المتوسطة الموجودة في الاعلان وهذه يكلف المشتري نقود اكثر. **اذن يعتبر هذه الاعلان مضلل**

---

❷ في استطلاع على 800 طالب اعدادية اجاب منهم 70 منهم على انهم يرغبون دخول كلية الهندسة فيما قال 50 منهم بانهم يرغبون في دخول كلية الطب. جاء في نتائج الاستطلاع "ان الطلاب يفضلون الهندسة على الطب"

**الجواب** عدد الطلاب المشاركون في الاستطلاع هم $70 + 50 = 120$ طالب من اصل 800 طالب

فتكون نسبتهم $\frac{120}{800} \times 100 = 15\%$ وهي نسبة قليلة غير كافية للحكم على رأي 800 طالب على انهم يرغبون دخول الهندسة

اذن تكون الاحصاءات مضللة وغير صحيحة لان العينة المأخوذة قليلة

---

❸ عُرض مقال على 20 شخصاً لتقويمه. ابدى 13 منهم اعجابهم بالمقال. وبناء على ذلك طرح صاحب المقال:

" ان المقال صالح للنشر لان نسبة الذي فضلوه كانت 13 الى 7"

**الجواب** الاحصاءات مضللة لان العينة المأخوذة من المجتمع 20 شخص وهي قليلة جداً للحكم على اعجاب مجتمع كامل بالمقال

لذلك تكون هذه الاحصاءات مضللة

---

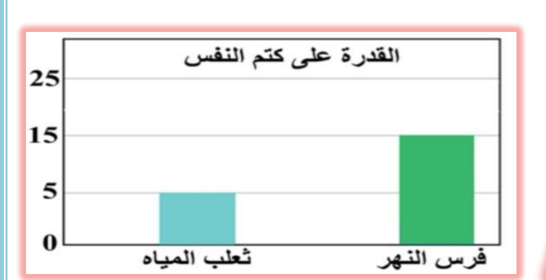
❹ باع مخزن ملابس رياضية مدة زمنية معينة 320 بدلة رياضية في حين باع مخزن لبيع الالعاب والملابس الرياضية بنفس الفترة 90 بدلة رياضية

**الجواب** المقارنة غير صحيحة حيث المتجر الذي باع 320 بدلة رياضية هو مختص بالبدلات الرياضية بينما المخزن الذي باع 90 بدلة رياضية في بيع البدلات والالعاب لذلك لا يجوز المقارنة بينهم فتكون الاحصاءات مضللة لاننا قارنا بين شيئين ليس من نفس الصنف





5 سئل 100 طالب عن الطريقة التي يفضلونها في القدوم الى المدرسة فكانت اجابات 60 طالباً منهم على النحو الاتي:
32 منهم يفضلون سيارات الاجره و 18 منهم يفضلون المشي و 10 طلاب يأتون بسيارتهم الخاصه. "استنتج صاحب الاستبيان ان نصف الطلاب يفضلون القدوم بواسطة سيارات الاجره"



**الجواب** الاحصاء مضلل لان: نصف الطلاب هو $50 = \frac{100}{2}$ طالب
وعدد الطلاب الذي يقدمون بواسطة سيارات الاجره هم 32 طالب وليس 50 طالب
لذلك يكون الاحصاء مضلل \ صغر حجم العينة

**H.W**: في استطلاع شمل 6 اشخاص حول مطالعه جريدة يومية . افاد 4 منهم انهم يفضلون تاجريده X . في نهاية الاستطلاع وردت الجملة الاتية: " يفضل 2 من كل 3 شخص مطالعة الجريدة X " لماذا يعد هذه الاعلان مضلل.

## تدرب وحل المسائل الحياتية

1 **الاحياء**: الرسم البياني المجاور يمثل القدره على كتم النفس لفرس النهر وثعلب المياه. لماذا البيانات في الرسم مضلله؟ وضح ذلك

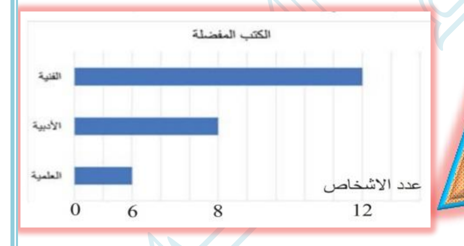
القدرة على كتم النفس

| | ثعلب المياه | فرس النهر |
|---|---|---|
| القيمة | 5 | 15 |

(المحور: 0، 5، 15، 25)

**الجواب** من النظرة الاولى نلاحظ ان عمود فرس النهر ضعف عمود ثعلب المياه ولكن بعد النظرة الى الارقام نجد فرس النهر 15 وثعلب المياه 5 وهذه لايدل على الضعف . لذلك يكون الرسم مضلل لان اطوال الفترات غير متساويه حيث الاولى والثانيه الفرق بينها 5 والثانية والثالث الفرق بينها 10 فيكون السبب\ عدم انتظام التدرج

2 **مطالعة**: الرسم البياني المجاور يمثل اشخاص يفضلون مطالعة الكتب الادبيه، العلمية، الفنية فسر لماذا البيانات في الرسم مضللة؟





**الجواب**

من النظرة الاولى نلاحظ ان عمود الكتب الفنية ضعف الكتب الادبيه ولكن بعد النظر الى الارقام نجد ان الكتب الفنية يطالعونها 12 شخص بينما الادبيه 8 وهذا لايدل على الضعف لذلك يكون الرسم مضلل لان اطوال الفترات غير متساويه حيث الاولى والثانيه الفرق بينهما 6 والثانيه والثالثه 2 والثالثه والرابعه 4 . فيكون السبب\ عدم انتظام التدرج





اعداد التربويين مصطفى محمد ◂ صفاء الكلابي




❸ **مواصلات:** بلغت ارباح شركة الطيران A في شهري تموز و آب 5500 مليون دينار، في حين بلغت الشركة B في شهري نيسان و مايس 7500 مليون دينار. فسر لماذا الاحصاءات مضللة؟



**الجواب** المقارنات غير صحيحه لان ارباح الشركة A في شهري تموز واب وارباح الشركة B شهري نيسان و مايس . وهذه غير ممكن ان نقارن ارباح في اشهر مختلفة لذلك تكون هذه الاحصاءات مضلله وغير دقيقية

❹ **تغذية:** تحتوي قصبة البروكلي على 477mg من البوتاسيوم والجزره الكبيره 230mg من البوتاسيوم في حين يحتوي رأس القرنابيط على 803mg من البوتاسيوم. فسر لماذا الاحصاءات هذه مضلله؟



**الجواب** الاحصاءات مضلله: لان المقارنه بين انواع مختلفة من الخضروات غير ممكن لذا تكون هذه الاحصاءات مضلله وغير دقيقية. بسبب اختلاف كتلها




**اولاً اصحح الخطأ** يقول محمد ان الرسم يكون غير مضلل اذا بدأ رسم الاعمده من الصفر بصرف النظر عن ثبوت طول الفترات. اكتشف خطأ محمد و صححه

**الجواب** ✗ خطأ محمد هو في اهمال ثبوت طول الفترات ✓ يكون الرسم غير مضلل اذا رسمت الاعمده من الصفر مع ثبات طول الفترات

**ثانياً حس عددي** حصل احد الباعة على العمولات التالية بالالاف الدنانير: شباط 965، آذار 170، نيسان 120، تموز 125، مايس 100 اخبر اصدقاءه ان متوسط عمولته الشهرية 265 الف دينار. فسر لماذا هذا الاحصاء مضلل؟

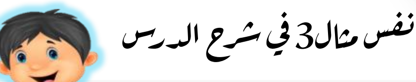
**الجواب** يكون الاحصاء مضلل: لان استخدم الوسط الحسابي وهناك قيمة متطرفة 965 لذلك الوسط الحسابي لايعد مقياساً مناسباً لذلك يكون هذه الاحصاء مضلل

**ثالثاً** مالذي يجب ان تتاكد منه لتقرر ما اذا كان الرسم البياني مضللاً ام لا؟

**الجواب** ❶ رسم الاعمدة من الصفر ❷ ثبوت طول الفترات بين الاعمده ❸ انتظام التدريج بين الفترات

**رابعاً اكتب** سؤال من الحياة اليومية تحتاج لعمل رسوم مضلله.

**الجواب** نفس مثال 3 في شرح الدرس



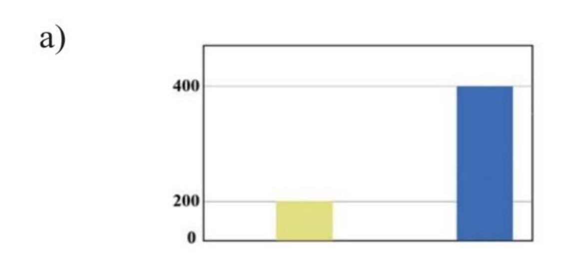
## Multiple Choice الاختيار من متعدد

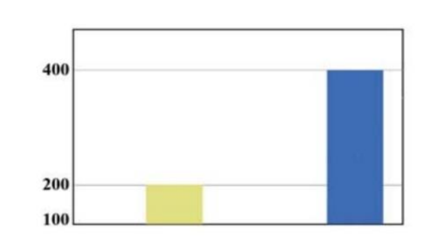
### الدرس [2-6] البيانات والاحصاءات المضلّلة

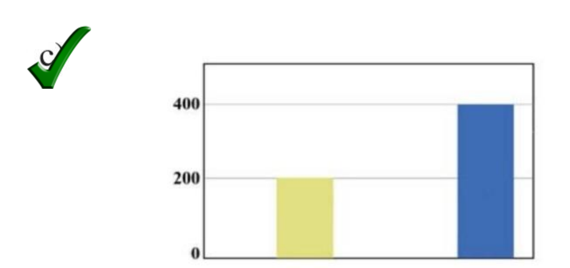
### Graphs and Misleading Statics

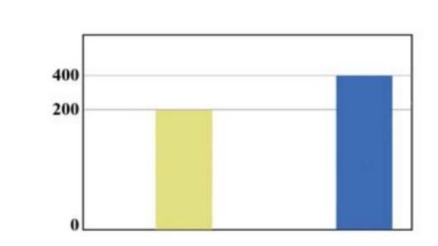
**اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:**

1 اي رسم بياني هو الافضل في تمثيل بيانات معينة:

a)



b)



c) ✓



d)



2 الرسم البياني يكون مضلّل:

a) يبدأ من الصفر والفترات غير متساوية
b) ✓ لايبدأ من الصفر والفترات غير متساوية
c) لايبدأ من الصفر والفترات متساوية
d) يبدأ من الصفر والفترات متساوية

3 في استطلاع شمل 6 مدرسين حول الدوام، افاد 4 منهم انهم يفضلون الدوام الصباحي. كتب المستطلع ان: (يفضل 2 مدرس من كل 3 مدرسين الدوام الصباحي) لماذا يعد هذا الاعلان مضلّلاً؟

a) العينة كبيرة جداً
b) يجب ان تشمل العينة عمال بناء
c) ✓ العينة صغيرة جداً
d) يجب ان تكون الجملة (يفضل به مدرس من كل مدرسين)

4 في محل تجاري عرض نوع من الاجبان على 12 شخص لتقويمه قبل عرضه، ابدى 6 منهم اعجابهم بالمنتج، بناءً على ذلك صرح المنتج «ان المنتج جيد لان نسبة الذين فضلوه كانت 6 الى 3».

a) البيانات غير مضلّلة لان نسبة 6 الى 3 نسبة كبيرة
b) البيانات غير مضلّلة لان نسبة الذين اعجبوا بالجبنة ضعف عدد الباقين
c) ✓ البيانات مضلّلة رغم ان عدد الذين اعجبوا بالجبنة ضعف عدد الباقين
d) البيانات مضلّلة لان العينة التي اختيرت متوسطة الحجم

# التباديل والتوافيق

الدرس (6 – 3)

سوف نقسم هذه الدرس الى ثلاث اقسام الاول المضروب و الثاني التباديل و الثالث التوافيق

## اولاً المضروب:

اذا كان n عدداً صحيحاً غير سالب فأن :- مضروب العدد n يرمز له بالرمز n! ويعرف بالعلاقة التالية

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(3)(2)(1) \quad \text{حيث } n \in Z^{+}$$

هو فتح العدد بصوره تناقصيه بينهما علامة ضرب الى ان يصل الى الواحد. ومن الثوابت $1! = 1$ , $0! = 1$

### مثال 1 جد قيمة كل مما يأتي.

❶ $5!$

SOL:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

❷ $4! - 2!$

SOL:

عندما تكون بين المضروبين عملية جمع او طرح اوضرب نقوس كل مضروب ثم نجد ناتجه ومن ثم نستخدم العملية

$4! - 2! = [4 \times 3 \times 2 \times 1] - [2 \times 1]$
$= [24] - [2] = 22$

❸ $3! \times 2!$

SOL:

$3! \times 2! = [3 \times 2 \times 1] \times [2 \times 1]$
$= [6] \times [2] = 12$

❹ $\frac{7!}{5!}$

SOL

نحاول فتح مضروب العدد 7! الى مضروب العدد 5! لكي نختصر البسط والمقام

$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42$

❺ $(7-5)!$

SOL:

عندما يكون المضروب خارج القوس نجري العمليات داخل القوس ثم نفتح المضروب للعدد الناتج من القوس

$(7-5)! = (2)!$
$= 2 \times 1 = 2$

❻ $\frac{(6-2)!}{0!}$

SOL:

$\frac{(6-2)!}{0!} = \frac{(4)!}{1}$
$= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

من الثوابت $0! = 1$

❼ $\frac{6!}{3 \times 6}$

SOL:

$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{18} = 5 \times 4 \times 2 = 40$

H.W: جد قيمة كل مما يأتي؟

| | | |
|---|---|---|
| ❶ $3! + 2!$ | ❸ $2! \times 6!$ | ❺ $4! \times 3!$ |
| ❷ $4! \times 2!$ | ❹ $0! \times 1!$ | ❻ $\frac{9!}{6!}$ |
| ❼ $(3+2)!$ | | |

## مثال 2

دخل 4 اشخاص الى غرفه تحتوي صفاً من 4 كراسي وطلب اليهم اجلوس على تلك الكراسي. كم طريقه يمكن ان يجلسون؟

**الجواب**

الشخص الاول الذي دخل الى الغرفه له 4 اختيارات \ الشخص الثاني الذي دخل الى الغرفه له 3 اختيارات

الشخص الثالث الذي دخل الى الغرفه له 2 اختيار \ الشخص الرابع الذي دخل الى الغرفه له 1 اختيار

ازن عدد الطرق الممكنه للجلوس هي $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ وهذه مايسمى بالمضروب

## ثانياً التباديل:

عدد التباديل لعناصر عددها $n$ مأخوذ منها $r$ في كل مره هو ناتج قسمة $n!$ على $(n-r)!$ ويرمز للتباديل بالرمز $P_r^n$ او $P(n,r)$ ويقرأ (تباديل $n$ من $r$) ويكتب بالقانون التالي

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{حيث} \quad 0 \le r \le n$$

**ومن ثوابت التباديل:**

❶ $P_0^n = 1$ لانه $P_0^n = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

❷ $P_1^n = n$ لانه $P_1^n = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

❸ $P_n^n = n!$ لانه $P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

## مثال 3

جد قيمة كل ممايأتي:

❶ $P_2^7$ — نكتب القانون ثم نعوض

SOL: $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

$P_2^7 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7\times6\times5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

❷ $P_4^{10}$

SOL: $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

$P_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!}$

$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

❸ $P_3^3$ — من الثوابت $P_n^n = n!$

SOL:

$P_3^3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

❹ $P_8^8$ — من الثوابت $P_n^n = n!$

SOL:

$P_8^8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 40320$

❺ $P_1^9$ — من الثوابت $P_1^n = n$

SOL:

$P_1^9 = 9$

❻ $P_0^9$ — من الثوابت $P_0^n = 1$

SOL:

$P_0^{10} = 1$

H.W : جد قيمة كل مما يأتي؟

| | | |
|---|---|---|
| ❶ $P_5^7$ | ❸ $P_{10}^{10}$ | ❺ $P_0^{20}$ |
| ❷ $P_3^7$ | ❹ $P_1^{15}$ | ❻ $P_0^5$ |

**كيف نميز مسائل التباديل: من خلال المعطيات التالية**

- الترتيب مهم في مسائل التباديل (ترتيب من الاعلى الى الادنى ، من الاكبر الى الاصغر و .........)
- عدم التكرار او دون ارجاع
- تكوين لجان حسب المناصب (مدير، موظف ، رئيس، عضو،.......)
- حل اسئله امتحانية دون ترك سؤال منها او اكثر






لعمل لوحات ارقام مكونه من خمس ارقام من بين الارقام من 1 الى 9 ماعدد الترتيبات المختلفة الممكنه؟

SOL:

بما أنه الترتيب مهم اذن نستخدم قانون التباديل

اكبر رقم هو $n$ والاصغر هو $r$

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , r = 5 \ , n = 9$$

$$P_5^9 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4!}{4!}$$

$$= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$ ترتيباً




ماهو عدد طرق تشكيل لجنه رباعية من 5 اشخاص لكل منهم وظيفه خاصه؟

SOL:

بما أنه تشكيل لجان لكل منهم وظيفه معينه اذن نستخدم قانون التباديل

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , r = 4 \ , n = 5$$

$$P_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{1} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$ لجنه




يراد تكوين عدد مكون من اربع مراتب من مجموعة الارقام 1, 2, 3, 4, 5 دون تكرار الرقم في العدد؟

SOL:

بما أنه مذكور في السؤال دون تكرار اذن نستخدم قانون التباديل

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , r = 4 \ , n = 5$$

$$P_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{1} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$ عدد

H.W :

تريد سالي ترتيب 4 كتب في خزانتها التي تحتوي على 8 رفوف . شرط الا تضع اكثر من كتاب واحد على كل رف. كم اختيار لديها؟

Ans: 360 طريقة





اعداد التربويين مصطفى محمد ▸ صفاء الكلابي

## ثالثاً التوافيق:

عدد التوافيق لعناصر عددها $n$ مأخوذ منها $r$ في كل مره هو ناتج قسمة $n!$ على $r!\,(n-r)!$ ويرمز للتوافيق بالرمز $C^n_r$ او $\binom{n}{r}$ ويقرأ (توافيق $n$ من $r$) ويكتب بالقانون التالي

$$C^n_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{حيث} \quad 0 \le r \le n$$

ومن ثوابت التوافيق:

❶ $C^n_0 = 1$ ❷ $C^n_1 = n$ ❸ $C^n_n = 1$

**مثال 7** جد قيمة كل ممايأتي:

❶ $C^8_2$

SOL: $C^n_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$C^8_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!\times 6!} = \frac{8\times 7\times 6!}{2\times 1\times 6!}$

$= \frac{8\times 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$

❷ $C^8_3$

SOL: $C^n_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$C^8_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\times 5!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{3\times 2\times 1\times 5!}$

$= 8\times 7 = 56$

❸ $C^{12}_{12}$

SOL: من الثوابت $C^n_n = 1$

$C^{12}_{12} = 1$

❹ $C^9_1$

SOL: من الثوابت $C^n_1 = n$

$C^9_1 = 9$

❺ $C^{50}_0$

SOL: من الثوابت $C^n_0 = 1$

$C^{50}_0 = 1$

❻ $\binom{9}{0}$

SOL: من الثوابت $C^n_0 = 1$

$\binom{9}{0} = C^9_0 = 1$

**H.W : جد قيمة كل مما يأتي؟**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ❶ $C^9_5$ | ❸ $C^8_8$ | ❺ $C^{10}_{10}$ | ❼ $\binom{10}{1}$ |
| ❷ $C^7_5$ | ❹ $C^{100}_{100}$ | ❻ $C^5_0$ | ❽ $\binom{7}{0}$ |

### كيف نميز مسائل التوافيق: من خلال المعطيات التالية

- الترتيب غير مهم في مسائل التوافيق (اختيار اشياء عشوائية)
- التكرار ممنوع او الارجاع ممنوع
- تكوين لجان بدون تحديد المناصب او تكوين فريق بدون ذكر ارقام
- حل اسئلة امتحانية يوجد فيها ترك سؤال او اكثر





مثال 8 اعلنت شركه عن 4 وظائف شاغره فتقدم 10 اشخاص. بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الاربع؟

SOL: بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر مناصب الوظائف ازن نستخدم قانون التوافيق

$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , r = 4 \; , n = 10$

$C_4^{10} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!\times 6!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{4\times 3\times 2\times 1\times 6!} = 10\times 3\times 7 = 210$ طريقة

لو كان في السؤال تحديد لمناصب الوظائف لكان الجواب باستخدام قانون التباديل

مثال 9 بكم طريقة يمكن تكوين لجنه من 4 طالبات من مجموع 8 طالبات؟

SOL: بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر مناصب اللجنه ازن نستخدم قانون التوافيق

$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , r = 4 \; , n = 8$

$C_4^{8} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!\times 4!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4\times 3\times 2\times 1\times 4!} = 2\times 7\times 5 = 70$ لجنه

مثال 10 تريد جمانه اختيار 3 اقداح من 5 تحتوي على عصير تفاح وليمون وعنب وموز واناناس. بكم طريقه يمكنها الاختيار؟

SOL: بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر طريقة الاختيار ازن نستخدم قانون التوافيق

$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , r = 3 \; , n = 5$

$C_3^{5} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2\times 1} = 5\times 2 = 10$ طرق

H.W:

❶ اعلنت شركه عن 5 وظائف شاغره فيها فتقدم للاعلان 10 اشخاص. بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمسه؟

❷ بكم طريقة يمكن اختيار لجنه مكونه من 3 طلاب من بين 8 طلاب؟

Ans:

❶ 252 طريقة

❷ 56 طريقة






## تدرب وحل المسائل الحياتية



**1 لجان:** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية من بين هيئة مكونة من 5 أشخاص؟

**الجواب** بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر مناصب اللجنة اذن نستخدم قانون التوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad , r = 3 \,, n = 5$$

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5\times \overset{2}{\cancel{4}}\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\times \cancel{2}\times 1} = 5 \times 2 = 10 \text{ طرق}$$

**2 لجان:** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية من بين هيئة مكونة من رئيس و نائب الرئيس وامين الصندوق من بين هيئة من 5 أشخاص؟

**الجواب** بما أنه الترتيب مهم لذكر مناصب اللجنة اذن نستخدم قانون التباديل

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad , r = 3 \,, n = 5$$

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times 4\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ طريقة}$$

**3 شطرنج:** في التصفيات النهائية لبطولة الشطرنج في احدى المدارس بين اربعة طلاب. كم عدد المباريات التي يمكن اجراؤها في التصفيات؟

**الجواب** بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر شروط اللعب اذن نستخدم قانون التوافيق



$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad , r = 2 \,, n = 4$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\times 2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}\times \cancel{2}\times 1} = 2 \times 3 = 6 \text{ مباراة}$$



**4 لوحات:** رسم فنان 7 لوحات فنية، فبكم طريقة يمكنه اختيار 5 لوحات منها لعرضها في معرض فني؟

**الجواب** بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر شروط الاختيار اذن نستخدم قانون التوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad , r = 5 \,, n = 7$$

$$C_5^7 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{5!\times 2!} = \frac{7\times \overset{3}{\cancel{6}}\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}\times \cancel{2}\times 1} = 7 \times 3 = 21 \text{ طريقة}$$

**5 اختبار:** ورقه اسئله تحتوي على 12 سؤلاً والمطلوب الاجابه عن 10 اسئله ؟بكم طريقه يمكن اختيار الاسئله

**الجواب** بما أنه الترتيب غير مهم لوجود ترك في الاسئله اذن نستخدم قانون التوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad ,r=10\,,n=12$$

$$C_{10}^{12} = \frac{12!}{10!(12-10)!} = \frac{12!}{10!\times 2!} = \frac{{}^{6}12\times 11\times 10!}{10!\times 2\times 1} = 6\times 11 = 66$$ طريقه

**6 رياضه:** اراد مدرس الرياضه اختيار فريق لكرة السله من اصل 9 لاعباً ،بكم طريقه يمكنه تشكيل الفريق؟

**الجواب** بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر طريقة الاختيار اذن نستخدم قانون التوافيق \\ فريق كرة السله 5 لاعبين

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad ,r=5\,,n=9$$

$$C_5^9 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!\times 4!} = \frac{{}^{3}9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 4\times 3\times 2\times 1} = 3\times 7\times 6 = 126$$ طريقه

**7 عصائر:** كم خيار لدى تماره لاختيار 3 اقداح من اقداح تحتوي على عصير الفواكه الاتيه: ليمون ،تفاح ،عنب ،موز ؟

**الجواب** بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر طريقة الاختيار اذن نستخدم قانون التوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad ,r=3\,,n=4$$

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!\times 1!} = \frac{4\times 3!}{3!\times 1} = 4$$ طريقه





فكر

اولاً تحدٍ



جد قيمة:

❶ $\dfrac{15!\ 9!}{14!\ 10!}$

*SOL:*

$$= \frac{15\times 14!\times 9!}{14!\times 10\times 9!} = \frac{{}^{3}15}{{}^{2}10} = \frac{3}{2}$$

❷ $\dfrac{5!}{3!\times 1!}\times\dfrac{6!}{5!\times 4!}$

*SOL:*

$$= \frac{5!}{3\times 2\times 1\times 1}\times\frac{6\times 5\times 4!}{5!\times 4!}$$

$$= 5$$







اعداد التربويين مصطفى محمد ◂ صفاء الكلاني




اختيار لجنة من 4 طلاب من مجموعة 7 طلاب ،فأن عدد الاختيارات اما $P_4^7$ او $C_4^7$ فسر اجابتك؟

الجواب: بما أنه الترتيب غير مهم لعدم ذكر طريقة اختيار اللجنة أذن نستخدم قانون التوافيق فيكون $C_4^7 = 35$ اختيار صحيح

ثالثاً تبرير

متى يكون $C_r^n = P_r^m$ ؟

الجواب: يكون في حالتين

1. عندما $r = 0 , n \neq m$ ← $C_0^n = P_0^m = 1$ مثلاً $C_0^5 = P_0^6 = 1$
2. عندما $r = 1 , n = m$ ← $C_1^n = P_1^n = n$ مثلاً $C_1^5 = P_1^5 = 5$




ما العلاقة بين تباديل (تراتيب) 3 من اصل 5 وتوافيق 3 من اصل 5؟ اكتب هذه العلاقة من خلال حسابك لكل منهما

الجواب:

$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ , $r = 3 , n = 5$

$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times2!} = \frac{5\times\overset{2}{4}\times3!}{3!\times2\times1} = 5 \times 2 = 10$

$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ , $r = 3 , n = 5$

$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

اذن العلاقة هي $P_3^5 = 6C_3^5$ علاقة ست امثال وبصورة عامة تكون العلاقة $P_r^n = r!\, C_r^n$

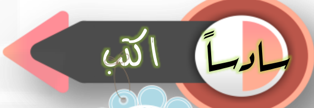



جد قيمة $n$ التي تجعل $\frac{n!}{(n-1)!} = 9$

الجواب:

$\frac{n!}{(n-1)!} = 9 \Rightarrow \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = 9$

$n = 9$




مسأله لاختيار 2 من بين 5 اشياء على ان يكون الترتيب فيها مهماً:

الجواب:

بكم طريقة يمكنك اختيار كرتين بلونين مختلفين من بين خمس كرات بشرط الترتيب؟

الترتيب مهم اذن نستخدم التباديل

$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ , $r = 2 , n = 5$

$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\times4\times3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$ طريقة




**Multiple Choice** الاختيارُ من متعدد

## الدرس [6-3] التباديل والتوافيق

## Permutation and Compilation

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 القيمة العددية للمقدار $(0!)(5!-3!)$ تساوي:

a) 2 b) 0 c) 114 ✓ d) ليس اياً منها

2 قيمة $C_1^{51}$ تساوي:

a) 1 b) 51 ✓ c) 50 d) ليس اياً منها

3 قيمة $P_0^{100}$ تساوي:

a) 100 b) 100! c) 0 d) 1 ✓

18, 1, 3, 16, 23, 3, 2.

4 عدد طرق تشكيل لجنة رباعية من 5 اشخاص لكل منهم وظيفة خاصة:

a) $P_4^5$ ✓ b) 5! c) 4! d) $C_4^5$

5 قيمة المقدار $\frac{n!}{(n-2)!}$ تساوي:

a) n! b) (n-2)! c) n (n-1)! d) n(n-1) ✓

6 عدد طرق اختيار 5 اسئلة من ورقة امتحان تحتوي على 7 امثلة هو:

a) 7 b) 5 c) 2! d) 21 ✓

7 القيمة العددية للمقدار $\frac{(8-3)!}{(3+2)!}$ هي:

a) 4! b) 3! c) 2! d) 1! ✓

8 قيمة المقدار $C_0^n + P_0^n$ تساوي:

a) 1 b) 2 ✓ c) 0 d) 0

# الدرس (6 – 4) الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين الاول الاحتمال التجريبي والنظري و الثاني الحدثان المتنافيان

## اولاً: الاحتمالات التجريبية والنظرية:

**الاحتمالات التجريبية:** هي الاحتمالات التي تزودنا بنتائج التجربة بعد تكرارها عدة مرات (تعتمد على تكرار التجربة)

ويمكن حسابها بالقانون التالي

$$P(E) = \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد مرات التجربة}}$$

**الاحتمالات النظرية:** هي الاحتمالات التي تزودنا بنتائج التجربة دون الحاجة الى اجرائها (تعتمد على فضاء العينة للتجربة)

ويمكن حسابها بالقانون التالي

$$P(E) = \frac{\text{عدد نتائج الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}\ \Omega}$$ او $$P(E) = \frac{m}{n}$$

حيث $m$ عدد نتائج الحدث، $n$ عدد عناصر فضاء العينة

**فضاء العينة:** هي مجموعة النتائج الممكنة لفعل عشوائي واحد او اكثر ويرمز لها بالرمز $\Omega$

**الحدث:** هو نتيجة او مجموعة نتائج ممكنة (يعتمد على حصول او عدم حصول الشيء وبأعناصره من فضاء العينة) ويرمز له بالرمز E

**مثال 1** عندرمي حجري نرد مره واحدة: جد ❶ انظري الاحتمال ام تجريبي؟ ❷ احتمال الحصول على المجموع 5 على وجهي الحجرين ❸ احتمال الحصول على وجه الحجر الأول ضعف الحجر الثاني

**SOL:**

❶ الاحتمال نظري لانه لم تتكرر التجربة اكثر من مره.

نكتب عناصر فضاء العينة للفعلين وهما رمي حجرين نرد متكون كل واحد من ست اوجه

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix}\right\}$$

ثم نجد عدد عناصر فضاء العينة باستخدام قانون العدد الأساسي $n = 6 \times 6 = 36$

❷ نكتب عناصر الحدث الأول $E_1$ مأخوذة من فضاء العينة أعلاه وهو مجموع الوجهين 5، $E_1 = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$

فيكون عدد نتائج الحدث، $m = 4$ و عدد عناصر فضاء العينة $n = 36$ ثم نطبق القانون الاحتمال النظري

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

❸ نكتب عناصر الحدث الثاني $E_2$ وهو الوجة الأول ضعف الوجة الثاني، $E_2 = \{(2,1),(4,2),(6,3)\}$ , $m = 3$ , $n = 36$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$



## مثال 2

في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة : جد احتمال الحصول على

1. العدد على وجه احد الحجرين ثلث العدد على الوجه الاخر
2. مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر من 8
3. مجموع العددين على وجهي الحجرين 12

SOL:

نكتب فضاء العينة لحجري النرد

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1), \ldots\ldots, (1,6) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (6,1), \ldots\ldots, (6,6) \end{Bmatrix}, n = 36$$

1. الحدث الأول وجه احد الحجرين ثلث الوجه الاخر

$E_1 = \{(1,3), (3,1), (2,6), (6,2)\}, m = 4$

$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

2. مجموع العددين اكبر من 8

$E_2 = \{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$

$m = 10$

$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

3. مجموع العددين 12

$E_3 = \{(6,6)\}, m = 1$

$P(E_3) = \frac{m}{n} = \frac{1}{36}$

## مثال 3

رمي حجر نرد 25 مرة وكانت النتائج في الجدول

| النتيجة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد المرات | 2 | 6 | 3 | 5 | 2 | 7 |

1. مانوع الاحتمال 2. جد احتمال ظهور العدد 4

SOL:

1. نوع الاحتمال تجريبي لان التجربة تكررت 25 مرة
2. حدث ظهور العدد 4 هو 5 مرات

نكتب قانون الاحتمال التجريبي

$P(E) = \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد مرات التجربة}}$

$P(E) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

## مثال 4

سحب كرة بشكل عشوائي من صندوق ثم اعيدت الية.

الجدول يبين النتائج بعد 50 سحبة

| النتيجة | احمر | ازرق | اصفر | ابيض | اصفر |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد السحوبات | 8 | 10 | 15 | 11 | 6 |

1. مانوع الاحتمال نظري ام تجريبي 2. جد احتمال سحب كرة صفراء
3. اكتب الاحتمال بصوره كسر عشري و نسبة مئوية

SOL:

1. نوع الاحتمال تجريبي لان التجربة تكررت 50 مرة
2. حدث سحب كرة صفراء هو 15 مرة فيكون احتمالها التجريبي

$P(E) = \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد مرات التجربة}} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$

3. لكي نحول الكسر الى نسبة مئوية نحاول جعل المقام 100 بضربة بعدد ثابت

$P(E) = \frac{3}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$ نسبة مئوية

$P(E) = \frac{30}{100} = 0.3$ عدد عشري

## مثال 5

رمي مهند قطعتي نقود 13 مرة . و سجلت النتائج التالية

| النتائج | (H, H) | (T, H) | (H, T) | (T, T) |
|---|---|---|---|---|
| التكرار | 7 | 1 | 3 | 2 |

1. جد الاحتمال النظري لظهور (H, T) 2. جد الاحتمال التجريبي لظهور (H, T) 3. هل الاحتمالين متساويين ؟

SOL:

1. الاحتمال النظري يعتمد على فضاء العينة وهي النتائج

$\Omega = \{(H,H), (T,H), (H,T), (T,T)\}, \quad n = 4$

فيكون حدث ظهور (H, T) هو مرة واحده $m = 1$

$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$

2. الاحتمال التجريبي يعتمد على تكرار التجربة وهي 13 مرة

وحدث ظهور (H, T) هو 3 مرات

$P(E) = \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد مرات التجربة}} = \frac{3}{13}$

3. الاحتمالين غير متساويين



## مثال 6

كيس يحتوي على 5 كرات زرق و 8 كرات خضر و 7 كرات صفر .

جد ❶ نوع الاحتمال نظري ام تجريبي ❷ احتمال سحب كرة زرقاء واحدة

SOL:

❶ نوع الاحتمال نظري.

فضاء العينة $\Omega$ هي مجموع الكرات في الكيس $\Omega = 5+8+7 = 20$

❷ حدث سحب كرة زرقاء هو 5 كرات من اصل 20 كرة فيكون احتمالها

$P(\text{زرقاء}) = \frac{m}{n} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

## مثال 7

وقف شخص في احدى التقاطعات في مدينة بغداد فأحصى 25 سيارة شاهدها. 13 صفراء و 7 بيض و 5 رصاصية. قدر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع صفراء ، ومانوع الاحتمال نظري ام تجريبي ؟ ثم اكتب النسبة بشكل كسر عشري ونسبة مئوية ؟

SOL:

نوع الاحتمال هو تجريبي لان المشاهدات حصلت على تكرارات 25 مرة عدد السيارات الصفراء هي 13 سيارة فيكون احتمال السيارة التالية ان تكون صفراء من اصل 25 تكرار للمشاهدات

$P(\text{صفراء}) = \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{عدد مرات التجربة}} = \frac{13}{25}$

$P(\text{صفراء}) = \frac{13}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{52}{100} = 52\%$ نسبة مئوية

$P(\text{صفراء}) = \frac{52}{100} = 0.52$ كسر عشري

## مثال 8

كيس فية 4 كرات حمراء و كرة خضراء كم كرة زرقاء يجب ان تضاف الى الكيس ليكون احتمال سحب الكرة الحمراء $\frac{2}{3}$ ؟ مانوع الاحتمال

SOL:

نفرض عدد الكرات الزرقاء $x$ فيكون عدد الكرات في الكيس $x+4+1 = x+5$

واحتمال الكرات الحمراء $\frac{2}{3}$ وعدد الحمراء 4

احتمال ظهور الكرات الحمراء $= \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلية}}$

$\frac{2}{3} = \frac{4}{x+5} \xrightarrow{\text{طرفين}\times\text{وسطين}} 2(x+5) = 12$

$2x+10 = 12 \Rightarrow 2x = 12-10 \Rightarrow 2x = 2 \xrightarrow{\div 2} x = 1$ زرقاء

نوع الاحتمال نظري

## مثال 9

وجد باحث في مصنع بطاريات السيارات ان احتمال كون البطارية غير صالحة هو $\frac{3}{20}$ انظري الاحتمال ام تجريبي؟ واذا اراد المصنع الحصول على 240 بطارية غير صالحة . فكم بطارية كان على المصنع انتاجه؟

SOL:

● الاحتمال تجريبي لان الكشف عن البطاريات الغير صالحه هو بالتجربه

وبفرض $x$ عدد البطاريات الذي سوف ينتجها المصنع للحصول على 240 بطارية غير صالحه وبأستخدام النسبة والتناسب نكون المعادلة

$\frac{3}{20} = \frac{240}{x} \xrightarrow{\text{طرفين}\times\text{وسطين}} 3x = 4800$

$x = \frac{4800}{3} \Rightarrow \therefore x = 1600$ بطارية

## مثال 10

أجريت دراسة على 100 شخص فأجاب 15 منهم انهم يستعملون اليد اليسرى ، فاذا أجريت الدراسة على 400 شخص فكم تتوقع عدد الأشخاص الذي يستعملون اليد اليسرى ؟

SOL:

نفرض $x$ عدد الأشخاص الذي يستعملون اليد اليسرى

$\frac{15}{100} = \frac{x}{400} \xrightarrow{\text{طرفين}\times\text{وسطين}} 100x = (15)(400)$

$100x = 6000 \xrightarrow{\div 100} x = \frac{6000}{100}$

$\therefore x = 60$

ماذا يكون الجواب لو كان المطلوب هو عدد الأشخاص الذي يستخدمون اليد اليمنى

من اصل 100 شخص 15 يستخدمون اليسرى . اذن 85 يستخدمون اليمنى

$\frac{85}{100} = \frac{x}{400} \xrightarrow{\text{طرفين}\times\text{وسطين}} 100x = (85)(400)$

$100x = 34000$

$\therefore x = 340$

## ثانياً الاحداث المتنافية:

**الحدثان المتنافيان:** هما حدثان لايمكن ان يتحققان معاً في تجربة واحدة .

**مثالاً:** عند رمي حجر نرد مره واحدة فأن الحصول على عدد فردي وعدد زوجي معاً مستحيل.

**ويمكن حساب احتمال الحدثين المتنافيين .**

اذا كان $E_1, E_2$ حدثين متنافيين فأن احتمال وقوع $E_1$ او وقوع $E_2$ يساوي مجموع الحدثين

$$P(E_1 or E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Or : معناها كلمة " او " أي احتمال الحدث الأول او احتمال الحدث الثاني

**مثال 11** عند رمي حجر النرد مره واحدة جد احتمال الحصول على العدد 3 او عدد زوجي؟

SOL:

بما انة لايمكن ان يظهر على وجه حجر النرد العدد 3 و عدد زوجي

لذا يكون الحدثان متنافيان

نكتب فضاء العينة لحجر النرد $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n = 6$

سوف نجد احتمال الحدث $E_1$ ظهور العدد 3 ، $m = 1$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

سوف نجد احتمال الحدث $E_2$ ظهور عدد زوجي، $m = 3$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6}$$

نطبق قانون الحدثان المتنافيان $P(E_1 or E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$$P(E_1 or E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

احتمال الحصول على العدد 3 او عدد زوجي هو $\frac{2}{3}$

**H.W:**

❶ في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة . جد احتمال الاحداث التالية؟

① العددان على وجهي الحجرين متساويين

② العدد على وجه الحجر الأول نصف العدد على الوجة الثاني

③ مجموع العددين على الوجهين يساوي 10

④ مجموع العددين على الوجهين اقل من 5

⑤ التجريبيه الاحتمالات السابقة ام نظرية.

❷ في تجربة رمي حجر النرد مره واحدة . جد:

① نوع الاحتمال نظري ام تجريبي.

② احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 4

❸ في تجربة رمي حجر النرد مره واحدة . جد:

① نوع الاحتمال نظري ام تجريبي.

② احتمال ظهور عدد زوجي.

③ نسبة الاحتمال بصورة نسبة مئوية وكسر عشري

❹ وقف مهند في احدى تقاطعات مدينة بغداد واحصى أنواع السيارات ، من بين 20 سيارة شاهدها احصى 10 سيارات صالون و 7 سيارات نقل صغيره لنقل الركاب و 3 سيارات حمل .

قدر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع سيارة صالون؟

Ans:

❶ ① $\frac{1}{6}$ , ② $\frac{1}{12}$ , ③ $\frac{1}{12}$ , ④ $\frac{1}{6}$ , ⑤ نظرية

❷ ① نظرية , ② $\frac{1}{6}$

❸ ① نظرية , ② $\frac{1}{2}$ , ③ 0.5 , 50%

❹ $\frac{1}{2}$









**مثال 12**

عند رمي حجري النرد مرة واحدة:
جد احتمال الحصول على عددين متساويين او مجموع الوجهين 3

**SOL:**

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1), \dots\dots, (1,6) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (6,1), \dots\dots, (6,6) \end{Bmatrix}, n = 36$$

الحدث الأول عددين متساويين

$$E_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}, m = 6$$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36}$$

الحدث الثاني مجموع الوجهين 3

$$E_2 = \{(1,2),(2,1)\}, m = 2$$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36}$$

الحدثان $E_1, E_2$ متنافيان لعدم وجود عناصر مشتركة بينهما

$$P(E_1 or\ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 or\ E_2) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{18}$$

**مثال 13**

جد احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً فردياً او تحمل عدداً من مضاعفات العدد 2 من بطاقات مرقمة من 1 الى 9 .

**SOL:**

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, n = 9$$

الحدث الأول الأرقام الفردية

$$E_1 = \{1,3,5,7,9\}, n = 5$$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$$

الحدث الثاني مضاعفات العدد 2

$$E_2 = \{2,4,6,8\}, n = 4$$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{9}$$

الحدثان $E_1, E_2$ متنافيان لعدم وجود عناصر مشتركة بينهما

$$P(E_1 or\ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 or\ E_2) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

**مثال 14**

الجدول المجاور يبين دراسة إحصائية على الكتب المفضلة لدى الأشخاص **اثرائي**

| الكتب | الاشخاص |
|---|---|
| دينية | 25 |
| علمية | 30 |
| رياضية | 45 |

❶ ما احتمال ان يفضل الشخص التالي الكتب العلمية؟
❷ ما احتمال ان لا يفضل الشخص التالي الكتب العلمية؟

**SOL:**

فضاء العينة هي مجموع الأشخاص $\Omega = 25 + 30 + 45 = 100$

❶ الحدث الأول الأشخاص الذي يفضلون الكتب العلمية $m = 30$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

❷ الحدث الثاني الأشخاص الذي لا يفضلون يفضلون الكتب العلمية $m = 25 + 45 = 70$ وهم الذي يفضلون الدينية والرياضية

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

او بطريقة ثانية:

الذي لا يفضلون العلمية اذن اما يفضلون الدينية او الرياضية

$$P(\text{دينية or رياضية}) = P(\text{دينية}) + P(\text{رياضية})$$

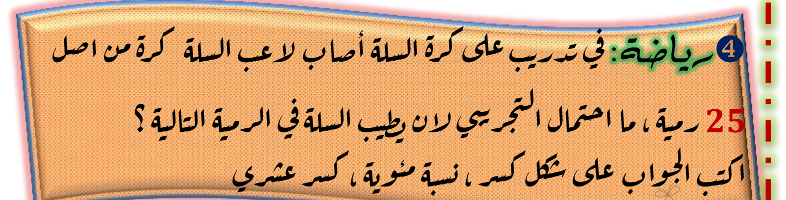
$$P(\text{دينية or رياضية}) = \frac{25}{100} + \frac{45}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

**H.W:**

عند رمي حجري النرد مره واحدة جد احتمال الحصول على عددين مجموعهما 5 او مجموعهما 11 . هل الحدثان متنافيان ؟ بين ذلك

Ans: $P(E_1 or\ E_2) = \frac{1}{6}$





## تدرب وحل المسائل الحياتية

❶ **تسلية:** بأي لون يجب تلوين الفراغ بحيث يكون احتمال ان يأتي المؤشر عند هذه اللون $\frac{1}{4}$

**الجواب**

عدد اقسام القرص يمثل فضاء العينة $n = 8$

$P(\text{الاحمر}) = \frac{m}{n} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ✗

$P(\text{الازرق}) = \frac{m}{n} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ✗

$P(\text{الاخضر}) = \frac{m}{n} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ✓

عندما فرضنا ان الفراغ يلون بأحد الألوان أعلاه ليكون الاحتمال هو $\frac{1}{4}$ فأن الاختيار هو اللون الأخضر

❷ **طوابع:** يهوى مهند جمع الطوابع البريدية فمن بين 60 طابعاً جمع 25 لدول عربيه، 15 لدول افريقيا، 20 لدول اوربيه، قدر احتمال الطابع الذي سيجمعه اوربياً

**الجواب**

$\Omega = 25 + 15 + 20 = 60$

$P(\text{اوربياً}) = \frac{m}{n} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

❸ **دراسة:** احصى رجل في عائلة 3 افراد عيونهم زرق من كل 22 فرداً، اذا رزق الرجل بمولود جديد، ما احتمال ان تكون عيناه ليست زرقاء

**الجواب**

الافراد الذي عيناهم زرقاء هم 3 من اصل 22

أي الذي عيونهم ليست زرقاء $22 - 3 = 19$

اذن احتمال ان يكون الطفل عيونه ليس زرقاء هو

$P(\text{ليس زرقاء}) = \frac{m}{n} = \frac{19}{22}$

❹ **رياضة:** في تدريب على كرة السلة أصاب لاعب السلة كرة من اصل 25 رمية، ما احتمال التجريبي لان يطيب السلة في الرمية التالية؟ اكتب الجواب على شكل كسر، نسبة مئوية، كسر عشري

**الجواب**

عدد مرات التجربة 25 ، عدد مرات الإصابة 15

$P(E) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$P(E) = \frac{3}{5} \times \frac{20}{20} = \frac{60}{100} = 60\%$

$P(E) = \frac{60}{100} = 0.6$









قرص ذو مؤشر مقسم الى ثلاثة أجزاء على الشكل المجاور: نصف القرص اخضر، ثلثة احمر، سدسة ازرق

ما احتمال ان يدل مؤشر القرص على الأخضر او الأحمر بعد اطلاقة




$P(\text{اخضر}) = \frac{1}{2}, P(\text{احمر}) = \frac{1}{3}, P(\text{ازرق}) = \frac{1}{6}$

$P(\text{اخضر } or \text{ احمر}) = P(\text{اخضر}) + P(\text{احمر})$

$P(\text{اخضر } or \text{ احمر}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$






يريد كل من سارة ومهند تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء او حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على 5 كرات زرقاء و4 كرات حمر و 6 كرات صفر، ايهما كانت اجابته صحيحة؟ فسر اجابتك.

| مهند | سارة |
| --- | --- |
| $P(R \text{ or } B) = P(R) \times P(B) = \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{4}{45}$ | $P(R \text{ or } B) = P(R) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ |




إجابة سارة هي الصحيحة لأنه الحدثان متنافيان وقانونهما هو حاصل جمعهما وليس ضربهما




توضيحاً لما يمثله كل عدد في الكسر $\frac{2}{9}$ الذي يمثله احتمال وقوع حدث نظري او تجريبي؟

الجواب

في الاحتمال النظري: البسط 2 هو عدد نتائج الحدث اما المقام 9 فيمثل عدد عناصر فضاء العينة

في الاحتمال التجريبي: البسط 2 هو عدد نتائج الحدث اما المقام 9 فيمثل عدد مرات التجربة



**Multiple Choice** — **الاختيارُ من متعدد**

## الدرس [4-6] الاحتمال والتجريبي والاحتمال والنظري

## Experimental Probability and Theoretical Probability

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1. اذا كان $E_1, E_2$ حدثان متنافيان فان $P(E_1 \text{ or } E_2)$ تساوي:

a) $P(E_1) - P(E_2)$ b) $P(E_1) \times P(E_2)$ c) $P(E_1) + P(E_2)$ ✓ d) $\frac{P(E_1)}{P(E_2)}$

2. سجل احمد 20 اصابة للهدف من 25 محاولة، أي نسبة مئوية للاحتمال التجريبي ان يسجل احمد الهدف في المحاولة التالية؟

a) 50% b) 60% c) 70% d) 80% ✓

3. اطلقت تمارة مؤشر القرص المقابل مرة واحدة، أي نسبة مئوية للاحتمال النظري ان يدل المؤشر على الرقم 2.




a) 35% b) 30% c) 12.5% ✓ d) 20%

4. عند رمي حجري النرد مرة واحدة، احتمال الحصول على عددين مجموعهما 3 او حاصل ضربهما 3 هو:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ ✓ c) $\frac{2}{3}$ d) 1

5. $E_1, E_2$ حدثان متنافيان، اذا كان $P(E_1 \text{ or } E_2) = \frac{5}{6}$ وان $P(E_2) = \frac{2}{3}$ فان $P(E_1)$ يساوي:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ ✓ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$

6. عند رمي حجري النرد، احتمال الحصول على عددين مجموعهما 13 هو:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 ✓

# الدرس (6 – 5) الاحداث المركبة

**الحدث المركب:** يتكون من حدثين بسيطين او اكثر وقد تكون مستقلة او مترابطة.

سوف نقسم هذه الدرس الى قسمين الاول الاحداث المستقله و الثاني الاحداث المترابطة

## اولاً الاحداث المستقلة:

**الحدثين المستقلين:** هما الحدثين الذي وقوع احدهما لايؤثر على وقوع او عدم وقوع الاخر.

**مثلاً:** " العصير لذيذ وصوت التلفزيون عالي " لو تلاحظ ان الحدث الأول لايؤثر على الثاني أي انهما مستقلين.

**ويمكن حساب احتمال الحدثين المستقلين.**

اذا كان $E_1, E_2$ حدثين مستقلين فأن احتمال وقوعهما معاً " هو حاصل ضرب احتمال $E_1$ في احتمال $E_2$ " كما في القانون التالي

$$P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

حيث ان : $and$ : معناها هو " و " ، " ثم "

**مثال 1** تشير تقارير شركة الخطوط الجوية العراقية الى وصول طائراتها في موعدها المحدد بنسبة $\frac{19}{20}$ ، كما تشير النسبة $2\%$ الى فقدان الامتعه فما احتمال وصول الطائرة في موعدها مع فقدان الامتعه ؟

**SOL:**

كلمة نسبة هي نفسها كلمة احتمال أي انه نسبة وصول الطائرة هو احتمال وصول الطائرة $P(E_1) = \frac{19}{20}$

نسبة فقدان الامتعة هو $2\%$ فيكون $P(E_2) = 2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

بما انه حدث وصول الطائره لايؤثر على فقدان الامتعه اذن الحدثين مستقلين. وسوف نستخدم قانون الحدثين المستقلين لايجاد احتمالهما

قانون الاحداث المستقله $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{19}{20} \times \frac{1}{50}$$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{19 \times 1}{20 \times 50}$$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{19}{1000} = 0.019 = 1.9\%$$





## مثال 2

كيس يحتوي على 3 كرات حمراء ، 4 كرات خضراء ، 5 كرات زرقاء ، سحب منه كرة عشوائياً ثم اعيدت الى الكيس و سحبت كرة ثانية
جد احتمال سحب كرة حمراء ثم خضراء ؟

**ملاحظات:** حول كيف حل امثلة الكرات او البطاقات ← الاحداث المستقلة

① نحدد نوع الحدث فاذا وجدت كلمات " اعادة او اعيدت او استعادة او ارجاع " فان نوع الحدثين مستقلين ونطبق قانونها .

② نجمع عدد الكرات او البطاقات الكلي

③ نجد احتمال الحدث الاول $P(E_1)$ الحدث الأول يكون قبل كلمة "ثم" ، " و"

④ نجد احتمال الحدث الثاني $(E_2)$ الحدث الثاني يكون بعد كلمة "ثم" ، " و"

⑤ نستخدم القانون التالي $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

**SOL:**

الحدثين مستقلين لان الكرة الأولى اعيدت الى الكيس

$3 + 4 + 5 = 12$ كرة

$E_1$ سحب كرة حمراء وعددهن 3 كرات من اصل 12 كرة

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$E_2$ سحب كرة خضراء وعددهن 4 كرات من اصل 12 كرة

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

قانون الاحداث المستقلة $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

نسبة ان تكون الكرة الأولى حمراء و الثانية خضراء هي $\frac{1}{12}$

## مثال 3

صندوق فيه 4 كرات حمراء، 9 كرات صفراء، 3 كرات سوداء. سحبت كرتان عشوائياً الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة اولاً . جد احتمال سحب كرة حمراء ثم سوداء ؟

**SOL:** الحدثان مستقلان لأنه الكرة المسحوبة اولاً اعيدت الى الصندوق

$4 + 9 + 3 = 16$ كرة

$E_1$ سحب كرة حمراء وعددهن 4 كرات من اصل 16 كرة

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$E_2$ سحب كرة سوداء وعددهن 3 كرات من اصل 16 كرة

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{3}{16}$$

قانون الاحداث المستقلة $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{16} = \frac{3}{64}$$

## مثال 4

اذا اختيرت احدى البطاقات المرقمة وتدوير مؤشر القرص المجاور كما مبين في الاشكال المجاورة



| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|

ما احتمال ان يكون الناتج عدداً زوجياً و اللون ازرق

**SOL:** الحدثان مستقلان لأنه ظهور بطاقة زوجية لا يؤثر على ظهور لون

$E_1$ ظهور بطاقة زوجية وعددهن 2 من اصل 4 بطاقات

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد البطاقات الزوجيه}}{\text{عدد البطاقات الكلي}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$E_2$ ظهور اللون الازرق وعدده 2 من اصل 8 الوان

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد اللون الازرق}}{\text{عدد الالوان الكلي}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

قانون الاحداث المستقلة $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

**ملاحظة:** لو كانت المطاليب في الأمثلة السابقة تحمل كلمة "او" وليس "ثم" ، " و" والحدثان متنافيان لكنا نستخدم قانون الاحداث المتنافية

$P(E_1 or\ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

## مثال 5

رمي قطعتي نقود مرة واحده. ما احتمال ظهور صوره على القطعة الأولى وكتابة على القطعة الثانية

**SOL:**

ملاحظة: قطعة النقود تتكون من وجهين H صورة T كتابة

الحدثان مستقلان لأنه ظهور صوره في الأولى لا يؤثر على ظهور كتابة في الثانية

$E_1$ ظهور صوره H في القطعة الأولى وعددها 1 من اصل وجهين

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد مرات الصورة}}{\text{عدد الاوجه الكلي}} = \frac{1}{2}$$

$E_2$ ظهور كتابة T في القطعة الثانية وعددها 1 من اصل وجهين

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد مرات الكتابة}}{\text{عدد الاوجه الكلي}} = \frac{1}{2}$$

قانون الاحداث المستقلة $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

## مثال 6

رمي حجري نرد مرة واحدة . ما احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 3 في الحجر الأول وعدد يقبل القسمة على 5 في الحجر الثاني

**SOL:**

ملاحظة: حجر النرد يتكون من الأرقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الحدثان مستقلان لان ظهور عدد يقبل القسمة على 3 في الحجر الأول لا يؤثر على ظهور عدد يقبل القسمة على 5 في الحجر الثاني

$E_1$ عدد يقبل القسمة على 3 في الحجر الأول وعددهم 2 من اصل 6 اعداد

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد ارقام تقبل القسمة على 3}}{\text{عدد الارقام الكلي}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$E_2$ عدد يقبل القسمة على 5 في الحجر الثاني وعددهم 1 من اصل 6 اعداد

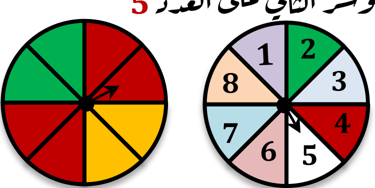
$$P(E_2) = \frac{\text{عدد ارقام تقبل القسمة على 5}}{\text{عدد الارقام الكلي}} = \frac{1}{6}$$

قانون الاحداث المستقلة $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

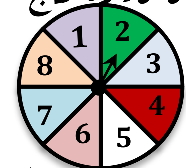
## H.W:

1. اطلق مؤشر في القرصين المجاورين مرة واحدة ، ما احتمال ان يأتي مؤشر الأول على اللون الأحمر ومؤشر الثاني على العدد 5



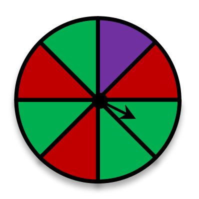
2. اختيرت احدى بطاقات الأرقام وتدوير مؤشر القرص الدوار . في الاشكال المجاوره، جد احتمال ان يكون الناتج على كل منهما عدد زوجي

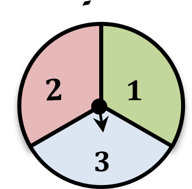
1 2 3 4 5



3. رمي قطعتي نقود مره واحدة ، ما احتمال ظهور الرسم على القطعتين

4. اطلق مؤشر في القرصين المجاورين مرة واحدة ، ما احتمال ان يأتي مؤشر الأول على اللون الاخضر ومؤشر الثاني على العدد 3





**Ans:**

1. $P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{16}$
2. $P(E_1 and\ E_2) = 20\%$
3. $P\left(\text{صوره} and\ \text{صوره}\right) = \frac{1}{4}$
4. $P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{6}$

## ثانياً الاحداث المترابطة:

**الحدثين المترابطين:** هما الحدثين الذي وقوع احدهما يؤثر على وقوع او عدم وقوع الاخر.

**مثلاً:** " اذا نجحت في المدرسة حصلت على هدية من والدي " لو تلاحظ انني لم احصل على هدية الا بعد نجاحي أي انهما مترابطين.

**ويمكن حساب احتمال الحدثين المترابطين.**

اذا كان $E_1, E_2$ حدثين مترابطين فأن احتمال وقوعهما معاً " هو حاصل ضرب احتمال $E_1$ في احتمال $E_2$ بعد حصول الحدث الاول" كما في القانون

$$P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(\ E_2 after\ E_1)$$

حيث ان: $E_2 after\ E_1$ : معناها هو الحدث الثاني بعد حصول الحدث الأول

**مثال 7** كيس يحتوي على 3 كرات حمراء ، 4 كرات خضراء ، 5 كرات زرقاء ، سحبت منه كرة عشوائياً دون اعادتها الى الكيس وسحبت كرة ثانية. جد احتمال سحب كرة حمراء ثم خضراء ؟

**ملاحظات:** حول كيف حل امثلة الكرات او البطاقات ← الاحداث المترابطة

① نحدد نوع الحدث فاذا وجدت كلمات "بدون اعادة او بدون استعادة او بدون ارجاع " فان نوع الحدثين مترابطين ونطبق قانونه.

② نجمع عدد الكرات او البطاقات الكلي

③ نجد احتمال الحدث الاول $P(E_1)$ الحدث الأول يكون قبل كلمة "ثم" ، " و"

④ نجد احتمال الحدث الثاني $P(\ E_2 after\ E_1)$ بعد حصول الحدث الاول الحدث الثاني يكون بعد كلمة "ثم" ، " و"

⑤ نستخدم القانون التالي $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(\ E_2 after\ E_1)$

**SOL:**

الحدثين مترابطين لان الكرة الأولى لم تعاد الى الكيس

$3 + 4 + 5 = 12$ كرة

$E_1$ سحب كرة حمراء وعددهن 3 كرات من اصل 12 كرة

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$E_2$ سحب كرة خضراء وعددهن 4 كرات من اصل 11 كرة لان الكرة الحمراء الذي سحبت في الحدث الأول لم تعاد الى الكيس

$$P(\ E_2 after\ E_1) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكرات الكلي الجديد}} = \frac{4}{11}$$

$P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(\ E_2 after\ E_1)$ قانون الاحداث المترابطة

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{11} = \frac{1}{11}$$

$\frac{1}{11}$ هي نسبة احتمال ان تكون الكرة الأولى حمراء والثانية خضراء بدون ارجاع الكرة الاولى

**ملاحظة:** الحدثين يكونا مترابطين اذا وجدت كلمة "بدون اعاده" او "بدون ارجاع"



**مثال 8**

صندوق فيه 5 كرات حمراء، 3 كرات زرقاء، 8 كرات صفراء. سحبت كرة من الصندوق دون اعادتها ثم سحبت ثانية. جد $P$ (صفراء ثم حمراء)؟

**SOL:**

الحدثان مترابطان لأنه الكرة الأولى لم تعاد الى الصندوق

> ملاحظة: اذا كان مطلب السؤال بالصيغة $P$ (صفراء and حمراء) فيكون الحدث الأول $E_1$ هو سحب كرة حمراء وليس صفراء لان اللغة الانكليزية تقرئ من اليسار الى اليمين

$5+3+8=\mathbf{16}$ كرة

$E_1$ سحب كرة صفراء وعددهن 8 كرات من اصل 16 كرة

$$P(E_1)=\frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

$E_2$ سحب كرة حمراء وعددهن 5 كرات من اصل 15 كرة لان الكرة الصفراء الذي سحبت في الحدث الأول لم تعاد الى الصندوق

$$P(E_2 \, after \, E_1)=\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلي الجديد}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

$P(E_1 and\ E_2)=P(E_1)\times P(E_2 \, after \, E_1)$ قانون الاحداث المترابطة

$$P(E_1 and\ E_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

---




صندوق فيه 3 كرات حمراء، 3 كرات خضراء. ما احتمال سحب كرتين خضراء من دون إعادة الكرة الأولى؟

**SOL:**

الحدثان مترابطان لأنه الكرة الأولى لم تعاد الى الصندوق

$3+3=\mathbf{6}$ كرة

$E_1$ سحب كرة خضراء وعددهن 3 كرات من اصل 6 كرات

$$P(E_1)=\frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$E_2$ سحب كرة خضراء وعددهن 2 كرة من اصل 5 كرات لان الكرة الخضراء الذي سحبت في الحدث الأول لم تعاد الى الصندوق

$$P(E_2 \, after \, E_1)=\frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكرات الكلي الجديد}}=\frac{2}{5}$$

$P(E_1 and\ E_2)=P(E_1)\times P(E_2 \, after \, E_1)$ قانون الاحداث المترابطة

$$P(E_1 and\ E_2)=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{5}=\frac{1}{5}$$

H.W:

❶ صندوق فيه 4 كرات حمراء، 9 كرات صفراء، 3 كرات سوداء. سحب كرتان عشوائياً الواحدة بعد الاخرى دون إعادة الكرة المسحوبة اولاً . ❶ ما نوع الحدثين ❷ جد احتمال سحب كرة حمراء ثم سوداء ❸ اكتب النسبة بالصورة المئوية

Ans: ❶ مترابطين ❷ $P(E_1 and\ E_2)=\frac{1}{20}$ ❸ 5%

❷ صندوق فيه 5 بطاقات حمراء، 4 بطاقات سوداء، 6 بطاقات خضراء. سحب بطاقة دون اعادتها الى الصندوق و سحب بطاقة ثانية ما احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء والثانية سوداء

Ans: $P(E_1 and\ E_2)=\frac{2}{21}$

## تدرب وحل المسائل الحياتية

❶ حلوى: تحتوي علبة على 10 قطع حلوى بطعم الفراولة، 15 قطعة بطعم الشكولاتة، 5 قطع بطعم الليمون. ما احتمال اختيار قطعتين عشوائيا الواحدة تلو الأخرى دون ارجاع على ان تكون الأولى بطعم الشكولاتة والثانية بطعم الليمون.

SOL:

الحدثان مترابطان لأنه القطعة الأولى لم تعاد الى العلبة

$10+15+5=30$ قطعة

$E_1$ سحب قطعة شكولاتة وعددهن 15 كرات من اصل 30 قطعة

$$P(E_1)=\frac{\text{عدد قطع الشكولاتة}}{\text{عدد القطع الكلي}}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

$E_2$ سحب قطعة الليمون وعددهن 5 كرات من اصل 29 قطعة

$$P(E_2 after\ E_1)=\frac{\text{عدد قطع الليمون}}{\text{عدد القطع الكلي الجديد}}=\frac{5}{29}$$

$$P(E_1 and\ E_2)=P(E_1)\times P(E_2 after\ E_1)$$

$$P(E_1 and\ E_2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{29}=\frac{5}{58}$$



❶ كتب: اختارت سها كتاباً من رف في غرفتها واعادته ثم اختارت كتاباً اخر، ما احتمال ان يكون اختيار الكتابين من كتب الرياضيات ؟علماً ان الرف يحتوي على 5 كتب رياضيات ، 2 كتاب لغة انكليزية، 3 كتب علوم.

SOL:

الحدثان مستقلان لأنه الكتاب اعيد الى المكتبة

$5+2+3=10$ كتب

$E_1$ سحب كتاب رياضيات وعددهن 5 من اصل 10 كتب

$$P(E_1)=\frac{\text{عدد كتب الرياضيات}}{\text{عدد الكتب الكلي}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$E_2$ سحب كتاب رياضيات وعددهن 5 من اصل 10 كتب

$$P(E_2)=\frac{\text{عدد كتب الرياضيات}}{\text{عدد الكتب الكلي}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

قانون الاحداث المستقلة $P(E_1 and\ E_2)=P(E_1)\times P(E_2)$

$$P(E_1 and\ E_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$



# فكر

**اولاً: اكتشف الخطأ**

يريد كل من جمانة و اختها تحديد احتمال اختيار كرة حمراء و اخرى صفراء عشوائياً من كيس يحتوي على 4 كرات حمراء و 5 كرات صفراء، دون ارجاع الكرة بعد السحب. ايهما كانت اجابتها صحيحة؟

| سالي | جمانة |
|---|---|
| $P(\text{حمراء و صفراء}) = P(\text{صفراء}) \times P(\text{حمراء}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8}$ | $P(\text{حمراء و صفراء}) = P(\text{صفراء}) \times P(\text{حمراء}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$ |

**الجواب:** إجابة سالي هي الصحيحة لأنه الكرة الحمراء لم يتم اعادتها لذلك سوف ينقص عدد الكرات الكلي في الحدث الثاني. فيكون عددها 8

**ثانياً: تحدٍ**

عند رمي حجر النرد و قطعة نقود، ما احتمال ظهور رقم اكبر من 2 واصغر من 6 على حجر النرد، والكتابة على قطعة النقود

**SOL:** الحدثان مستقلان لأنه ظهور رقم على النرد لا يؤثر على ظهور كتابة

$E_1$ رقم اكبر من 2 واصغر من 6 على النرد و عددهم 3 ارقام من اصل 6 ارقام

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد ارقام الحدث}}{\text{عدد الارقام الكلي}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$E_2$ ظهور كتابة على القطعة وعددهم وجه واحد من اصل وجهين

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد اوجه الكتابة}}{\text{عدد الاوجه الكلي}} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**ثالثاً: مسألة مفتوحة**

10 بطاقات بثلاث الوان مختلفة، اكتب مسألة تتعلق بسحب بطاقتين دون ارجاعها على ان يكون الاحتمال $\frac{1}{15}$؟

**الجواب:** نكتب المسألة أدناه وفق معطيات السؤال ثم نقوم بحلها الى ان يكون ناتج احتمالها $\frac{1}{15}$ عندها يكون الحل صحيح؟

صندوق يحتوي على 5 بطاقات حمراء، 2 خضراء، 3 زرقاء، سحب بطاقتين بدون ارجاع الأولى. ما احتمال ان البطاقة المسحوبة خضراء ثم زرقاء

الحدثان مترابطان لأنه البطاقة الأولى لم تعاد الى الصندوق

$E_1$ سحب بطاقة خضراء وعددهن 2 من اصل 10 بطاقات

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد البطاقات الخضراء}}{\text{عدد البطاقات الكلي}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$E_2$ سحب بطاقة زرقاء وعددهن 3 من اصل 9 بطاقات

$$P(E_2 after\ E_1) = \frac{\text{عدد البطاقات الزرقاء}}{\text{عدد البطاقات الكلي الجديد}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2 after\ E_1)$$

$$P(E_1 and\ E_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

**رابعاً** الكتب مثالاً على حدثين **مستقلين** ومثالاً على حدثين **مترابطين**؟

**الجواب** راجع الأمثلة السابقة في شرح الموضوعين السابقين واختر أي مثال لحدثين **مستقلين** وحدثين **مترابطين**

## مراجعة للاحتمالات التجريبية والنظرية والاحداث المتنافية والمستقلة والمترابطة

| السؤال | الجواب |
|---|---|
| مانوع الاحتمال | ❶ يكون **تجريبي** اذا تكررت التجربة اكثر من مرة ❷ يكون **نظري** اذا لم تتكرر التجربة اكثر من مرة |
| مانوع الحدثين | ❶ يكونان **متنافيين** اذا لا يمكن ان يتحققان معاً في تجربة واحدة .<br>❷ يكونان **مستقلان** اذا احدهما **لا يؤثر** على وقوع او عدم وقوع الاخر او وجود الكلمات "**مع إعادة**" "**مع ارجاع**"، "**مع استعادة**"<br>❸ يكونان **مترابطان** اذا احدهما **ايؤثر** على وقوع او عدم وقوع الاخر او وجود الكلمات "**بدون إعادة**" "**بدون ارجاع**"، "**بدون استعادة**" |
| قانون احتمال الحدثان المتنافيان | $P(E_1 or\ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ عندما يكون في السؤال كلمة "**او**" |
| قانون احتمال الحدثان المستقلان | عندما يكون في السؤال كلمة "**و**" ، "**ثم**" والحدثان مستقلان $P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ |
| قانون احتمال الحدثان المترابطان | عندما يكون في السؤال كلمة "**و**" ، "**ثم**" والحدثان مترابطان<br>$P(E_1 and\ E_2) = P(E_1) \times P(E_2 after E_1)$ |

**انتباه:** $E_1$ الحدث الأول يكون قبل الكلمات "**و**" ، "**ثم**" ، "**او**" و $E_2$ الحدث الثاني بعد هذه الكلمات


اما اذا كانت الكلمات باللغة الانكليزية "**and**" ، "**or**" فيكون العكس



الدرس [6-5] الاحداث المركبة

## Compound Events

### اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 $E_1, E_2$ حدثان مستقلان، حيث $P(E_1) = 0.3$ وان $P(E_2) = 0.9$ فان احتمال حدوث $E_1, E_2$ معاً هو:

a) 1.2 b) 0.6 c) 0.27 ✓ d) 0.3

2 رمى مصطفى حجر نرد وقطعة نقود، احتمال ظهور رقم اكبر من 5 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود هو:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{12}$ ✓ d) 3

3 صندوق فيه 5 كرات حمر، 4 كرات خضر.
$E_1$: سحب كرة حمراء، $E_2$: سحب كرة خضراء دون اعادة الحمراء. فان احتمال حدوثهما معاً هو:

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{5}{18}$ ✓ c) $\frac{19}{18}$ d) $\frac{1}{18}$

4 $E_1, E_2$ حدثان مترابطين فان احتمال وقوعهما معاً هو:

a) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{ after } E_1)$

b) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{ before } E_1)$

c) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$ ✓

d) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_1 \text{ after } E_2)$

5 العلاقة $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ بين الحدثان $E_1, E_2$ حيث هما:

a) لاتوجد علاقة بينهما b) مستقلان ✓ c) مترابطان d) غير ذلك

6 $E_1, E_2$ حدثان متنافيان حيث: $P(E_1) = 0.15$, $P(E_2) = 0.45$ ، فأن احتمال حدوث $E_1$ او $E_2$ هو:

a) 0.0675 b) 3 c) 0.6 ✓ d) 0.3





# الدرس (6 – 6) خطة حل المسألة (أنشئ نموذجاً)

في هذه الدرس نستخدم اربع خطوات للحل وهي أفهم، خطط، حل، تحقق

**مثال** حل المسائل التالية باستراتيجية (أنشئ نموذجاً)

❶ **مربعات**: حاول محمد ترتيب 5 قطع مربعة الشكل ملونة (اسود، احمر، ازرق، اصفر، اخضر) بطرائق مختلفة، كم طريقة يمكن ان يرتبها بشرط ان اول مربع اسود اللون و اخر مربع اصفر اللون؟

**إفهم**

ما معطيات المسألة؟ 5 قطع مربعة الشكل ملونة (اسود، احمر، ازرق، اصفر، اخضر)

ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد عدد الطرق الممكنة لترتيبها بشرط ان اول مربع اسود اللون و اخر مربع اصفر اللون؟

**خطط**

كيف تحل المسألة؟ أنشئ نموذجاً لتوضيح تلك الطرق المختلف

**حل**

نلتزم بالشرط المعطى في السؤال وهو اول مربع اسود واخر مربع اصفر، لكي نحسب عدد الطرق.

❶ ❷ ❸ ❹ ❺ ❻

اذن هناك ست طرق لترتيب المربعات بشكل مختلف

**تحقق**

نتحقق من عدد الطرق باستخدام مضروب عدد المربعات ولكن ليس مضروب الخمسة لان الشرط استثنى مربعين وهما الأول والأخير

اذن يكون مضروب الثلاثة ، $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ طرق اذن الحل صحيح

● ملاحظة: لو لم يكن هناك شرط بتثبيت المربع الأسود والاصفر لكان الناتج هو مضروب الخمسة وهكذا بالنسبة لأي شرط ننقصه من العدد الكلي للمربعات و نستخرج عدد الطرق المختلفة




❷ **الارقام:** لديك الارقام 4, 3, 2, 1، كم عدد يمكن تكوينه من 4 ارقام شرط عدم تكرار الرقم في العدد والعدد اكبر من 4000؟



**افهم**

**ما معطيات المسألة؟** لدينا الارقام 4, 3, 2, 1

**ما المطلوب من المسألة؟** إيجاد عدد الطرق لتكوين عدد مكون من 4 ارقام شرط عدم تكرار الرقم في العدد والعدد اكبر من 4000؟



**كيف تحل المسألة؟** أنشئ نموذجاً لتوضيح تلك الطرق المختلف



نلتزم بالشرط المعطى في السؤال وهو عدد مكون من 4 ارقام شرط عدم تكرار الرقم في العدد والعدد اكبر من 4000؟

بما انه العدد اكبر من 4000 اذن نثبت الرقم 4 في مرتبة الالاف.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ❶ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ❷ | 4 | 3 | 1 | 2 |
| ❸ | 4 | 2 | 3 | 1 |
| ❹ | 4 | 2 | 1 | 3 |
| ❺ | 4 | 1 | 3 | 2 |
| ❻ | 4 | 1 | 2 | 3 |

اذن هناك ست طرق لترتيب الاعداد



نتحقق من عدد الطرق باستخدام مضروب عدد الأرقام ماعدا رقم الالاف فيكون عددهم ثلاثة

اذن يكون مضروب الثلاثة ، طرق $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ اذن الحل صحيح



❸ **اشجار**: في بستان فلاح 28 شتلة برتقال وتفاح ، فإذا كان مقابل كل 4 شتلات برتقال 3 شتلات تفاح . ما عدد شتلات البرتقال؟






**ما معطيات المسألة؟** بستان فلاح فيه 28 شتلة برتقال وتفاح

مقابل كل 4 شتلات برتقال 3 شتلات تفاح

**ما المطلوب من المسألة؟** ما عدد شتلات البرتقال؟

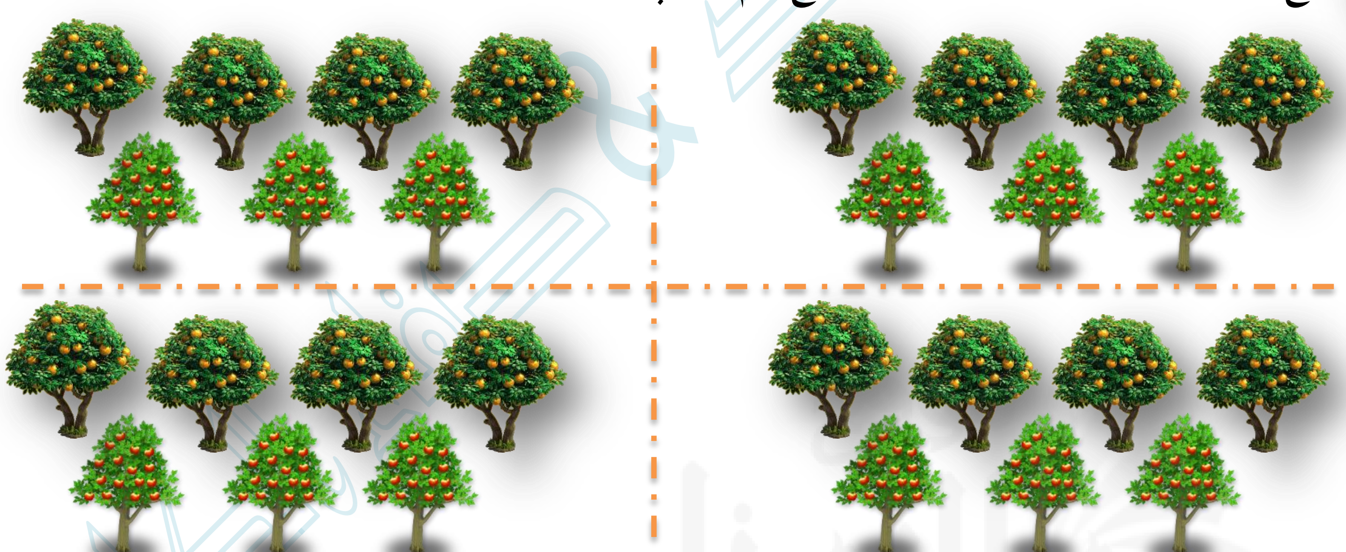





**كيف تحل المسألة؟** أنشئ نموذجاً لتوضيح عدد شتلات البرتقال ؟

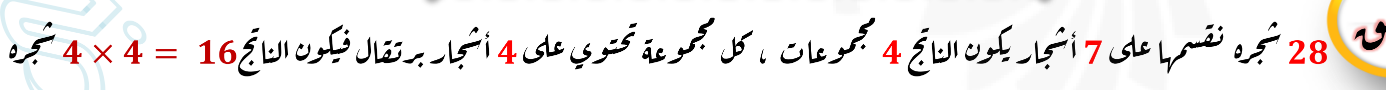



نضع مقابل كل 4 شتلات برتقال 3 شتلات تفاح ، ثم ن حسب عدد شتلات البرتقال



28 شجرة كونت 4 مجموعات كل مجموعة تحتوي على 4 شتلات برتقال 3 شتلات تفاح ، عدد أشجار البرتقال 16 شجره و التفاح 12 شجره



28 شجره نقسمها على 7 أشجار يكون الناتج 4 مجموعات ، كل مجموعة تحتوي على 4 أشجار برتقال فيكون الناتج 16 = $4 \times 4$ شجره

اذن الحل صحيح





اعداد التربويين مصطفى محمد ◂ صفاء الكلابي






❹ **بستان:** مزارع يسقي بستانه مره كل أسبوعين ، كم مرة يسقي البستان في 6 اشهر ؟



**ما معطيات المسألة؟** مزارع يسقي بستانه مره كل أسبوعين

**ما المطلوب من المسألة؟** كم مرة يسقي البستان في 6 اشهر



**كيف تحل المسألة؟** أنشئ نموذجاً لتوضيح عدد مرات سقي البستان ؟



كل شهر يتكون من اربع أسابيع تقريباً و يتبقى يومين

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| الشهر 4 | اسبوع 1 | اسبوع 2 ✔ | اسبوع 3 | اسبوع 4 ✔ |
| الشهر 5 | اسبوع 1 | اسبوع 2 ✔ | اسبوع 3 | اسبوع 4 ✔ |
| الشهر 6 | اسبوع 1 | اسبوع 2 ✔ | اسبوع 3 | اسبوع 4 ✔ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| الشهر 1 | اسبوع 1 | اسبوع 2 ✔ | اسبوع 3 | اسبوع 4 ✔ |
| الشهر 2 | اسبوع 1 | اسبوع 2 ✔ | اسبوع 3 | اسبوع 4 ✔ |
| الشهر 3 | اسبوع 1 | اسبوع 2 ✔ | اسبوع 3 | اسبوع 4 ✔ |

6 اشهر $\times$ 30 يوم $= 180$ يوم نقسمها على أسبوعين يساوي $\frac{180}{14}$ $12.8 \approx 13$ مرة تقريباً

نلاحظ ان عدد مرات السقي في المخطط لست اشهر 12 مرة \ أي فرق مره واحده !!!!!! اين الفرق ؟؟



4 اسابيع $\times$ 7 ايام $= 28$ يوم فيتبقى يومين من الشهر

**الفرق هو:** الشهر يتبقى منه يومين $\times$ 6 اشهر $= 12$ يوم أي تقريباً أسبوعين !!! وفي هذه الأسبوعين يسقي البستان مرة واحده

فيكون الحل صحيح في النماذج $12 + 1 = 13$ مرة





❺ **اشكال هندسية:** قسمت 24 قطعة على شكل مثلثات و مربعات و دوائر الى اربع مجموعات ، فاذا كان عدد المربعات يزيد بمقدار 1 على عدد الدوائر ويقل بمقدار 1 عن عدد المثلثات ، فما عدد القطع لكل نوع




**ما معطيات المسألة؟** 24 قطعة على شكل مثلثات و مربعات و دوائر مقسمة الى اربع مجموعات فاذا كان عدد المربعات يزيد بمقدار 1 على عدد الدوائر ويقل بمقدار 1 عن عدد المثلثات

**ما المطلوب من المسألة؟** فما عدد القطع لكل نوع ؟




**كيف تحل المسألة؟** أنشئ نموذجاً لتوضيح عدد القطع لكل نوع ؟




24 قطعة مقسمة على 4 مجموعات ، كل مجموعة تحتوي على 6 قطع

وحسب الشرط "عدد المربعات يزيد بمقدار 1 على عدد الدوائر ويقل بمقدار 1 عن عدد المثلثات "

يكون عدد كل نوع في المجموعة ، 3 مثلثات ، 2 مربعات ، 1 دائرة





فيكون عدد كل نوع، 12 مثلثات، 8 مربعات ، 4 دوائر




لو قمنا بجمع اعداد الاشكال 12 مثلث + 8 مربعات + 4 دوائر = 24 قطعة








# تم بحمد الله

الى كل من تقع بيده الملزمة من اخوتنا الأساتذة او أصحاب المكتبات او اخوتنا و اولادنا الطلاب انتم بريئين ا الذمة من طبع او استنساخ هذه الملزمة بشرط عدم إزالة اسماءنا منها لأنها تعتبر مصادرة لجهدنا وتعبنا ، من تلخيص وتنضيد وأفكار ..........

ولا تنسونا ووالدينا بالدعاء

التربويين صفاء الكلابي و مصطفى محمد

للتواصل زيارة صفحات السلسلة :   سلسلة الناجح في الرياضيات

**ملاحظة : أجب عن خمسة أسئلة فقط . لكل سؤال ٢٠ درجة .**

س1 : A) ضع المقدار التالي في أبسط صورة : $\frac{y+2}{2y-4} \div \frac{y^3+8}{y-2}$ .

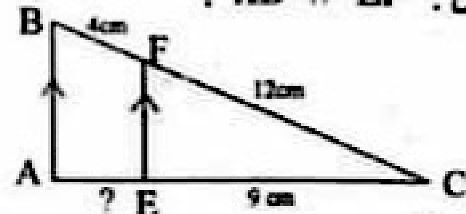
B) مسبح يبلغ طوله $(x+9)$ متر وعرضه $(x+1)$ متر ومحاط بممر عرضه متر واحد ، اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة .

س2 : أجب عن فرعين مما يأتي :

A) أثبت صحة : $(3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}) = 1$ .

B- جد مجموعة حل المعادلة $3x^2 + 18x - 21 = 0$ .

C) في الشكل أدناه ، جد طول قطعة المستقيم $\overline{AE}$ علماً أن : $\overline{AB} \,//\, \overline{EF}$ .




س3 : A) مثل المعادلة التربيعية التالية في المستوي الإحداثي $y = x^2 - 1$ .

B) اكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتابعة حسابية ، حدها السابع (36) وأساسها ( 4 ) .

س4 : A) اختر الإجابة الصحيحة لاثنين مما يأتي :

1) $8 + x^3 = .........$  a) $(2-x)(4+2x+x^2)$ ، b) $(2+x)(4-2x+x^2)$ ، c) $(2-x)(4-2x+x^2)$ ، d) $(2+x)(4+2x+x^2)$

2) $y^2 + 4y - 21 = .........$  a) $(y-7)(y+3)$ ، b) $(y+7)(y-3)$ ، c) $(y-7)(y-3)$ ، d) $(y+7)(y+3)$

3) $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = .........$  a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، b) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ ، c) $1$ ، d) $-1$

B) ما قيمة الثابت $k$ التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+2)x + 36 = 0$ متساويين ؟

س5 : أجب عن فرعين فقط مما يأتي :

A) حل المتباينة التالية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد : $8 \le 2 - |5y|$ .

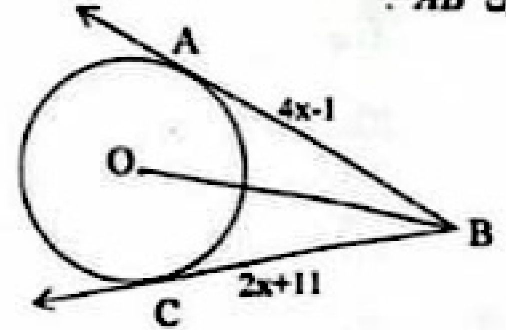
B) القيمة العددية للمقدار $(\sin 30^\circ \cos 30^\circ)$ هي :

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

C) جد مجموعة حل النظام في $R$ باستخدام طريقة التعويض : $y = 4x$ ، $y = x + 6$ .

س6 : A) ليكن التطبيق : $f : N \to N$ ، حيث $f(x) = 3x + 1$
$g : N \to N$ ، حيث $g(x) = x^2$ ، جد قيمة $f \circ g(2)$ .

B) في الشكل أدناه : استعمل مبرهنة المماسين ، وجد طول $\overline{AB}$ .



اللجنة الدائمة للامتحانات العامة
الدراسة : المتوسطة
المادة : الرياضيات



جمهورية العراق - وزارة التربية
الدور الأول ١٤٤٠ هـ - ٢٠١٩م
الوقت : ثلاث ساعات

**ملاحظة : أجب عن خمسة أسئلة فقط . لكل سؤال ٢٠ درجة .**

**س1 :** A) جد مجموعة حل النظام في $R$ باستخدام طريقة الحذف : $3y - 2x - 7 = 0$

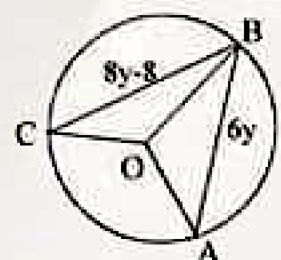
$y + 3x + 5 = 0$

B) مستقيم يمر بالنقطة $(5 , -1)$ ، وميله $\frac{-2}{5}$ ، جد معادلته .

**س2 :** أجب عن فرعين ممّا يأتي :

A) موقع بيت محمود عند النقطة $(4 , 0)$ وموقع مدرسته عند النقطة $(0 , 3)$ ، ما المسافة التي يقطعها محمود عند ذهابه إلى المدرسة ؟ علماً أنّ طول ضلع كل مربع في المستوي الإحداثي يمثّل كيلو متراً واحداً .

B) في الشكل أدناه ، إذا كانت الزاويتان $AOB$ ، $COB$ متطابقتان ، جد طول $\overline{CB}$ .




C) اكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية :

$\{ 6 ، 1 ، -4 ، -9 ، ... \}$ ، وحدّد ما إذا كانت المتتابعة متناقصة أم متزايدة .

**س3 :** A) 1) ما العدد المجهول في المقدار ؟ $x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + \square)$

2) جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة منزل إذا كان ارتفاعه $(\sqrt{18} - \sqrt{3})$ متر وطول قاعدته $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$ متر .

B) اثبت أنّ : $\cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**س4 :** A) اختر الإجابة الصحيحة لكل ممّا يأتي : ( ١٥ درجة ) ( لكل فقرة ٥ درجات )

1) إذا كان $f : N \to N$ بحيث $f(x) = 2x - 3$ و $g : N \to N$ بحيث $g(x) = x + 1$ فإنّ التطبيق $(g \circ f)(x)$ هو :

$a) 2x - 2$ $b) 2x - 4$ $c) 2x + 2$ $d) 2x + 4$

2) حل المعادلة $x^2 = 144$ في $R$ باستعمال قاعدة الجذر التربيعي هو :

$a) S = \{7, -7\}$ $b) S = \{14, -14\}$ $c) S = \{12, -12\}$ $d) S = \{12, 12\}$

3) القيمة العددية للمقدار $(0!)(3!-5!)$ تساوي :
$a) 2$ $b) 114$ $c) 0$ $d)$ ليس أياً منها

B) ضع المقدار التالي في ابسط صورة : $\frac{y^3 + 27}{y^3 - 3y^2 + 9y}$ . ( ٥ درجات )

**س5 :-** A) بيّن هل للمعادلة التالية حل في $R$ ؟ وما نوع الجذرين باستخدام المقدار المميز ؟ $x^2 - 2x + 10 = 0$

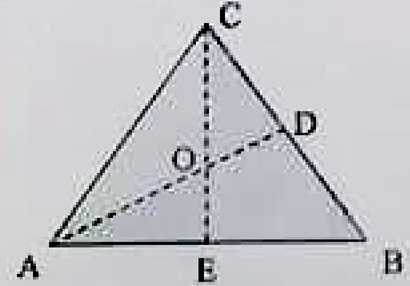
B) اكتب الحد المفقود في المقدار $y^2 + ......... + 36$ ليصبح مربعاً كاملاً ، ثم حلله .

**س6 :** أجب عن فرعين ممّا يأتي :

A) حل المتباينة التالية ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد : $|6x| + 4 < 10$

B) في تجربة رمي حجري النرد مرة واحدة ، جد احتمال الحصول على مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي ( 5 ) .

C) المثلث $ABC$ فيه $\overline{CE}$ ، $\overline{AD}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة $O$ ، $AD = 6cm$ ، $CE = 9cm$ ،
جد طول $\overline{OE}$ ، $\overline{AO}$ .



اللجنة الدائمة للامتحانات العامة
الدراسة : المتوسطة
المادة : ( الرياضيات )



جمهورية العراق - وزارة التربية
الدور الأول ١٤٤٠ هـ - ٢٠١٩م
الوقت : ثلاث ساعات

خارج العراق

ملاحظة : أجب عن خمسة أسئلة فقط . لكل سؤال ٢٠ درجة .

س1 :- A) بيّن نوع المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(3,-4)$ ، $B(5,-2)$ ، $C(5,-6)$ من حيث الأضلاع ، وهل المثلث قائم الزاوية ؟ بيّن ذلك .

B) إذا كانت $A=\{1,2,3,4\}$ ، $B=\{1,4,9,16\}$ وأن $f:A\to B$ معرف بقاعدة الاقتران $f(x)=x^2$ ، ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق ، وبيّن هل التطبيق يمثّل تقابلاً أم لا ؟

س2 : أجب عن فرعين ممّا يأتي :

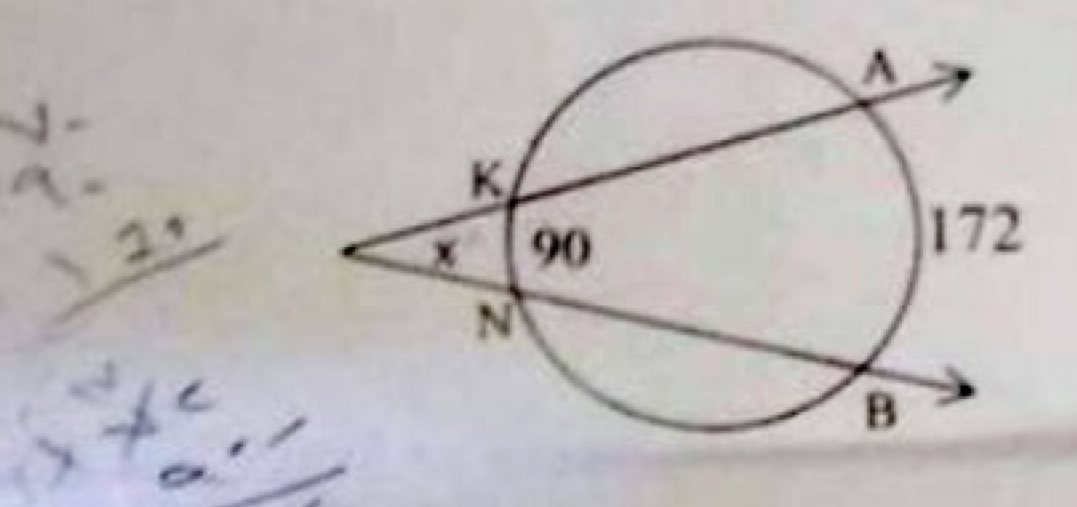
A) جد مجموعة حل المتباينة $|y-3|\le 4$ ، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد .

B) صمم حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه $(3m)$ في منتصف حديقة مربعة الشكل ، فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض $(40m^2)$ ، فما طول ضلع الحديقة ؟

C) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(5,3)$ والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $A(4,5)$ ، $B(2,-3)$ .

س3 : A) جد قيمة $x$ التي تجعل الحدود الثلاثة الأولى للمتتابعة الحسابية كما يلي : $\{2x, x+1, 3x+11, ...\}$ .

B) جد قياس الزاوية الخارجية $x$ في الشكل أدناه :




س4 : A) حلل اثنين ممّا يأتي :

1) $6z^3-9z^2+12-8z$    2) $5h^2-7v^2$    3) $16z^2-8z+1$

B) جد مجموعة الحل للنظام التالي في $R$ بيانياً :

$y=x-4$ .......... (1)

$x=2-y$ .......... (2)

س5 : A) اختر الإجابة الصحيحة لكل ممّا يأتي : ( لكل فقرة ٥ درجات )

1) إذا كانت $\csc\theta=2$ فإنّ قيمة الزاوية $\theta$ هي : $d)30^\circ$    $c)90^\circ$    $b)60^\circ$    $a)45^\circ$

2) القيمة العددية للمقدار $\frac{(8-3)!}{(3+2)!}$ هي : $d)1!$    $c)2!$    $b)3!$    $a)4!$

3) العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار ( 42 ) هو :

$d)S=\{-7,-6\}$    $c)S=\{-7,6\}$    $b)S=\{7,-6\}$    $a)S=\{7,6\}$

B) حوض سمك الزينة حجمه $(25x^3)$ متر مكعب ، وضع في داخله حجر مكعب الشكل حجمه $(\frac{1}{5})$ متر مكعب ، ملئ الحوض بالماء كاملاً ، اكتب المقدار الذي يمثله حجم الماء ، ثم حلله . ( ٥ درجات )

س6 : أجب عن فرعين ممّا يأتي :

A) جد ناتج : $(y+2)(y^2-2y+4)$ .

B) جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل وطول ضلعها $(8cm)$ وارتفاعه الجانبي $(7.2cm)$ .

C) كيس يحتوي على (5) كرات زرق ، (8) كرات خضر ، (7) كرات صفر ، جد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة من الكيس .

اللجنة الدائمة للامتحانات العامة
الدراسة : المتوسطة
المادة : الرياضيات



جمهورية العراق - وزارة التربية
الدور الثاني ١٤٤٠ هـ - ٢٠١٩م
الوقت : ثلاث ساعات

**ملاحظة : أجب عن خمسة أسئلة فقط . لكل سؤال ٢٠ درجة .**

**س1 :** A) بسّط الجملة العددية الآتية : $\sqrt{5}\,(\sqrt{125} - \sqrt{20})$

B) ما العدد الذي لو أضيف أربعة أضعافه إلى مربعه لكان الناتج ( 45 ) ؟

**س2 :** أجب عن فرعين ممّا يأتي :

A) إذا كان المقدار الجبري $(x^2 - 4)$ يمثّل عدد الكتب العلمية في المكتبة والمقدار $(x^2 + x - 6)$ يمثّل عدد الكتب الأدبية في المكتبة ، اكتب نسبة الكتب العلمية إلى الكتب الأدبية بأبسط صورة .

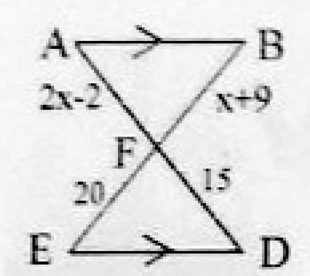
B) جد حجم هرم قاعدته مثلث منتظم وطول ضلعه $(6\ m)$ وارتفاعه $(13\ m)$ .

C) جد القيمة العددية للمقدار : $(\sec 60^\circ)^2 - (\tan 60^\circ)^2$

**س3 :** A- جد مجموعة حل النظام في $(R)$ باستخدام طريقة الحذف :

$$4y = 22 - 3x$$
$$4y = 3x - 14$$

B) إذا علمت أنّ : $\Delta ABF \sim \Delta EDF$ استعمل المعلومات في الشكل أدناه لتجد قيمة $x$ .




**س4 :** A) جد الحد السابع لمتتابعة حسابية حدّها الأول ( 5 ) وأساسها ( 2 ) ؟

B) صندوق فيه ( 5 ) بطاقات حمر ، ( 4 ) بطاقات سود ، ( 6 ) بطاقات خضر ، سحبت بطاقة دون إعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية ، ما احتمال أن تكون البطاقة الأولى حمراء والثانية سوداء ؟

**س5 :** A) اختر الإجابة الصحيحة لكلّ ممّا يأتي : ( لكل فقرة ٥ درجات )

1) الحد المفقود في الحدودية $(Z^2 + ... + 49)$ لتصبح مربعاً كاملاً هو :

$a)\ 14Z \quad , \quad b)\ -14Z \quad , \quad c)\ 72 \quad , \quad d)\ -72$

2) المسافة بين النقطتين $(2\ ,\ -5)$ ، $(0\ ,\ 3)$ تساوي :

$a)\ -2\sqrt{17} \quad , \quad b)\ \sqrt{10} \quad , \quad c)\ 17\sqrt{2} \quad , \quad d)\ 2\sqrt{17}$

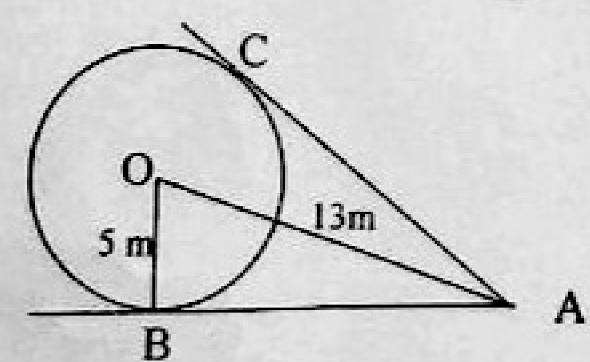
3) قيمة المقدار $C_0^n + P_0^n$ تساوي : $a)\ 1 \quad , \quad b)\ 2 \quad , \quad c)\ 0 \quad , \quad d)$ ليس أياً منها

B) جد حاصل ضرب : $(2y - 3)(y + 9)$

**س6 :** أجب عن فرعين ممّا يأتي :

A) جد قيمة $(a)$ التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(6\ ,\ a)$ ، $(3\ ,2)$ يساوي $\left(\frac{-1}{4}\right)$ .

B) استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة : $\overline{AB}\ ,\ \overline{AC}$ في الدائرة المجاورة :




C) حل المعادلة التالية في $(R)$ : $3x^2 - 9 = 0$

اللجنة الدائمة للامتحانات العامة
الدراسة : المتوسطة
المادة : الرياضيات



جمهورية العراق - وزارة التربية
الدور الثالث ١٤٤١ هـ - ٢٠١٩م
الوقت : ثلاث ساعات

**ملاحظة : أجب عن خمسة أسئلة فقط ، ولكل سؤال ٢٠ درجة .**

س1 : A) اكتب المقدار الجبري الآتي في أبسط صورة : $\frac{x+5}{12x} \times \frac{6x-30}{x^2-25}$

B) اجب عن اولاً أو ثانياً :

اولاً : جد معادلة المستقيم الذي ميله $(\frac{1}{2})$ ومقطعه السيني $(-1)$

ثانياً : باستخدام المقدار المميز بين أنّ جذري المعادلة $x^2 - 4x + 4 = 0$ متساويان .

س2 : A) جد مجموعة حل النظام في $R$ باستعمال طريقة الحذف .

$x - y = -4$ ......(1)

$x + y = 6$ ......(2)

B) قطعة موكيت سجاد مستطيلة الشكل طولها $(12\ m)$ وعرضها $(3\ m)$ قطعت إلى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل ، ما طول ضلع الغرفة ؟

س3 : اجب عن فرعين مما يأتي :

A) حل المعادلة الآتية في R : $3y^2 + 5y - 12 = 0$

B) جد الحدود بين $u_6$ و $u_{10}$ لمتتابعة حسابية ، حدها الثاني $(-11)$ وأساسها $d = -3$ .

C) أثبت أنّ : $\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$

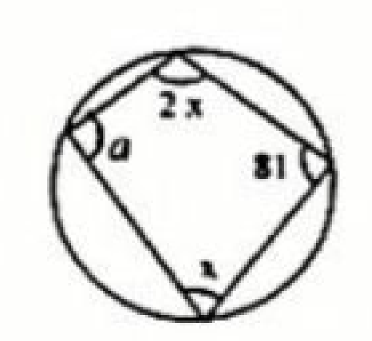
س4 : A) حلل اثنين مما يأتي :

1) $x^3 - x$

2) $y^3 + 125$

3) $4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$

B) جد قيمة $a$ ، $x$ في الشكل المجاور :




س5 : اجب عن فرعين مما يأتي :

A- رسم فنان ( 7 ) لوحات فنية ، فبكم طريقة يمكنه اختيار ( 5 ) لوحات منها لعرضها في معرض فني ؟

B) جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لهرم منتظم ارتفاعه الجانبي $(8\ cm)$ وقاعدته مربعة الشكل طول ضلعها $(3\ cm)$ .

C) بسّط الجملة العددية الآتية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية : $\sqrt{8}\,(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - 3\sqrt{6}$

س6 : A) اختر الإجابة الصحيحة ( لثلاث ) مما يأتي : ( لكل فقرة 5 درجات )

1) إذا كان $f : Z \longrightarrow R$ و $f(x) = 3x - 2$ فإنّ صورة العدد ( 10 ) هي :

$a)\,30$ $b)\,25$ $c)\,17$ $d)\,28$

2) قيمة المقدار $\frac{n!}{(n-2)!}$ تساوي : $a)\,n!$ $b)\,(n-2)!$ $c)\,n(n-1)!$ $d)\,n(n-1)$

3) المستقيم الموازي لمحور السينات يكون ميله : a) صفر b) غير معرف c) سالب d) موجب

4) المسافة بين النقطتين $(3, 4)$ , $(4, 5)$ تساوي : $a)\,\sqrt{2}$ $b)\,2$ $c)\,5$ $d)\,\sqrt{5}$

B) اكتب الحد المفقود في المقدار الآتي ليصبح مربعاً كاملاً : $36 - 12y + ........$ ( ٥ درجات )